

Futuros professores e problemas de matemática: elaborar ou escolher problemas prontos?

Ana Carolina Ferreira Rangel 

Flávia Sueli Fabiani Marcatto 

Resumo

Este artigo tem como objetivo discutir sobre o modo como futuros professores de matemática elaboram ou escolhem problemas que podem ser utilizados em sala de aula, verificando as potencialidades que o problema pode gerar e como explorá-lo em sala de aula. Para cumprir com o objetivo do texto, trazemos as categorias de análise segundo a definição de Cai e Hwang (2020) descrita para a estrutura de proposição de problemas, para alunos e professores, em atividades intelectuais específicas, de alguns dados produzidos na pesquisa de mestrado da primeira autora, de cunho qualitativo e interpretativo. Esses dados foram coletados seguindo a última etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Allevato e Onuchic (2014).

Palavras-chave: Formação inicial de professores de matemática, Resolução de Problemas, Proposição de Problemas.

Future teachers and math problems: elaborating or choosing ready-made problems?

Ana Carolina Ferreira Rangel

Flávia Sueli Fabiani Marcatto

Abstract

This article aims to discuss how future mathematics teachers develop or choose problems that can be used in the classroom, verifying the potential that the problem can generate and how to explore it in the classroom. To fulfill the purpose of the text, we bring the categories of analysis according to the definition of Cai and Hwang (2020) described for the problem posing structure, for students and teachers, in specific intellectual activities, of some data produced in the master's research by the first author of a qualitative and interpretative nature. These data were collected following the last step of the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving, proposed by Allevato and Onuchic (2014).

Keywords: Initial training of mathematics teachers, Problem solving, Problem posing.

Introdução

As normas sociais da sala de aula de matemática descrevem as formas esperadas de agir e explicar de professores e alunos (YACHEL e COBB, 1996). Elas são reflexivamente relacionadas às crenças dos professores e alunos sobre suas obrigações. Na sala de aula tradicional de matemática é esperado que o aluno tente dominar o conteúdo, os procedimentos apresentados pelo professor e o material didático, ou seja, o papel do professor é apresentar, esclarecer e propor e o papel do aluno é tentar descobrir as intenções do professor.

Este trabalho, traz parte de um estudo realizado com futuros professores de matemática sobre a elaboração de problemas ou escolha de problemas prontos sobre Análise Combinatória. O objetivo foi investigar como um grupo licenciandos em Matemática, elaboram ou escolhem problemas que podem ser utilizados em sala de aula, verificando as potencialidades do problema, e as estratégias de exploração em sala de aula. Pretende-se dessa forma, fortalecer os dados de pesquisa sobre a proposição de problemas na formação de professores de matemática.

A proposição de problemas matemáticos (PPM) é o processo de formular e expressar um problema dentro do domínio da matemática. Cai et al. (2015) definem a Proposição de Problemas como aquela que exige que professores ou alunos gerem novos problemas ou perguntas com base em situações dadas.

O trabalho foi desenvolvido durante a pandemia do Covid-19, através do Ensino Remoto (ER), utilizando os recursos de uma plataforma de colaboração digital (Google sala de aula) com interações em tempo real e assíncronas. As interações entre pesquisadores e futuros professores, aconteceram ao longo de um semestre, com licenciandos em Matemática, de uma universidade pública no interior de São Paulo.

Os resultados deste estudo, indicam que os professores de matemática em formação, nesse grupo, preferem escolher problemas prontos em referências como o livro didático e em menor número, quando optam por elaborar os problemas, esses se destacaram por terem uma temática atual e formulados de forma adequada, conceitualmente.

Fundamentação teórica

Considerando que a pesquisa em proposição de problemas em Educação Matemática tem avançado nos últimos anos (CAI e HWANG, 2020; KONTOROVICH et al 2012; SILVER et al, 1996), concordamos com Cai e Hwang (2020) que existe uma desconexão entre a pesquisa e a prática em Educação Matemática. O ensino de matemática em sala de aula que está sob o controle dos professores, tem foco em um conjunto estreito e pouco ambicioso de objetivos de aprendizagem e continua sendo um ensino tradicional e expositivo com poucas oportunidades de aprendizagem.

Nas escolas, a resolução de problemas ocupa um lugar de destaque em relação à proposição de problemas, mesmo que a elaboração de problemas, por professores e alunos, tenha sido reconhecida em documentos curriculares oficiais (BNCC, 2017) e documentos orientadores para promover inovação pedagógica em Educação Matemática (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989; Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991), não houve interesse pelo uso da PPM de forma instrucional, ou seja, para aprender matemática na Educação Básica.

Quais conclusões podemos chegar tendo como referência a literatura sobre a proposição de problemas? Os efeitos da aprendizagem através da proposição de problemas são, geralmente, relevantes mesmo quando os problemas elaborados por alunos e professores não são adequados. Sabe-se também, que as habilidades de resolução de problemas são necessárias, mas não suficientes na proposição de problemas. A PPM como uma atividade de aprendizagem complexa ainda não é suficientemente compreendida e, conseqüentemente, a necessidade de uma base teórica coerente sobre aspectos particulares da proposição de problemas é importante (CAI e HWANG, 2020; KONTOROVICH et al, 2012; SILVER et al., 1996).

Para Yang et al., (2020) as crenças dos professores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática referem-se às visões dos professores sobre suas preferências e entendimentos de como ensinar matemática e como ela é aprendida, suas concepções de atividades ideais de ensino em sala de aula, quais comportamentos e atividades cognitivas estão envolvidas no aprendizado de matemática e o que constitui atividades de aprendizagem de matemática apropriadas.

Dessa forma, é importante que os futuros professores vivenciem experiências durante a sua formação com atividades matemáticas significativas e relacionadas à vida real, para que possam fazer conjecturas, investigações, coletar e analisar dados e se comunicar e colaborar com seus pares.

Cai et al (2015) destacam que os investigadores em Educação Matemática têm notado a importância das oportunidades para a exploração de situações matemáticas para o desenvolvimento da capacidade dos estudantes de propor problemas. Cai e Cifarelli (2005) consideram o processo de propor e resolver problemas como sendo de exploração matemática. Assim, corroboramos com as ideias de Cai e Hwang (2020) que assumem o processo de formular problemas e/ou expressar problemas dentro do domínio da matemática como Proposição de Problemas Matemáticos (PPM).

Na formação inicial de professores de matemática, em especial, a distinção entre a proposição de problemas pelos alunos e pelos professores é muitas vezes confusa. No entanto, recorremos a Cai et al (2015) para essa distinção ao solicitar que os futuros professores

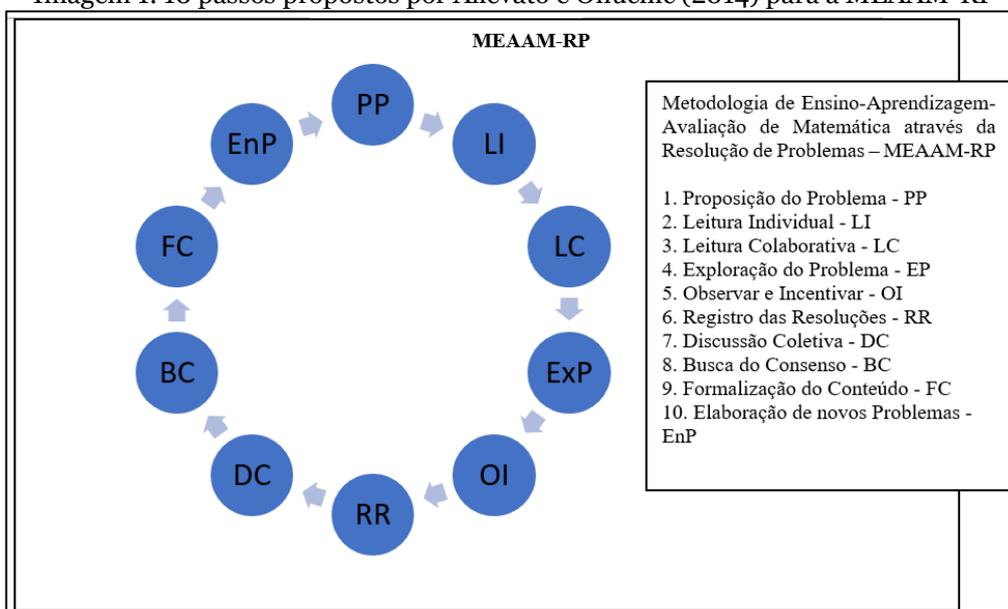
proponham problemas que eles esperam que seus alunos, da Educação Básica, lhes apresentem em uma determinada situação.

Cai e Hwang (2020) descrevem uma estrutura para a PPM definindo, separadamente, para alunos e professores, atividades intelectuais específicas. Os alunos apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas, podendo ainda, apresentarem problemas com algumas alterações, ou seja, reformulando-os. Para os professores, esses autores definem além das duas atividades anteriores, descritas para os alunos, mais três: os professores preveem os tipos de problemas que os alunos podem apresentar com base em determinadas situações-problema; os professores criam situações matemáticas de proposição de problemas para os alunos elaborarem os problemas; os professores apresentam problemas matemáticos para os alunos resolverem.

No contexto de um ensino de matemática através da resolução de problemas, alguns autores propõem etapas para desenvolver esse processo. Allevato e Onuchic (2014) apresentam dez passos em uma sequência pré-determinada. Foram definidos encaminhamentos para as aulas guiadas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAM-RP).

Essas etapas (Imagem 1) foram pensadas como facilitadoras para encontrar um melhor caminho para a resolução dos problemas. É uma possibilidade da Resolução de Problemas para garantir ao aluno que alcance o resultado desejado. Em cada uma dessas fases o professor tem um papel definido, mas sempre deixando com que os alunos construam o caminho da resolução para o problema.

Imagem 1: 10 passos propostos por Allevato e Onuchic (2014) para a MEAAM-RP



Fonte: Adaptado de ALLEVATO e ONUCHIC (2014)

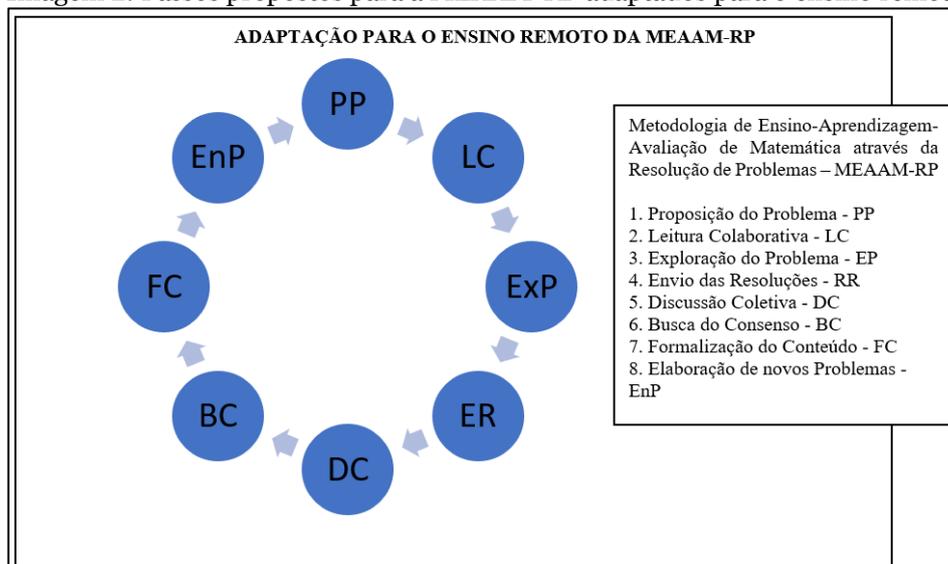
O último passo dessa metodologia sugere a elaboração de novos problemas a partir do problema apresentado pelo professor, no início do processo, para os alunos resolverem. Nesse estudo a MEAAM-RP foi o eixo norteador e integrador, valendo-se de estratégias adequadas de resolução de problemas e da orquestração do discurso em sala de aula, para maximizar oportunidades de aprendizagem. Todos se envolveram nas atividades de resolução de problemas: (1) encontraram várias estratégias de resolução para um determinado problema; (2) engajaram-se na proposição de problemas e exploração matemática; (3) justificando suas soluções; e (4) fazendo generalizações. (CAI, 2010).

Desenvolvimento da pesquisa

Essa pesquisa tem cunho qualitativo e interpretativo. Qualitativo porque valoriza processos didáticos em ambiente natural (BOGDAN, BIKLEN, 1994) e interpretativo quando procura compreender, no contexto do ensino, os modos pelos quais professores e alunos constituem ambientes de uns para outros (ERICKSON, 1986).

Este estudo, teve a participação de oito alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade paulista, em sete encontros *online* em que foram explorados problemas sobre Análise Combinatória por meio de uma adaptação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAM-RP) para a modalidade de Ensino Remoto (Imagem 2), seguindo as orientações de distanciamento social adotadas em meio à pandemia da COVID-19.

Imagem 2: Passos propostos para a MEAAM-RP adaptados para o ensino remoto



Fonte: Elaborado pelas autoras

A cada encontro os alunos se dividiam em duplas ou trios e buscavam utilizar os passos sugeridos na MEAAM-RP para resolver um problema combinatório. O encontro se

iniciava com a pesquisadora propondo um novo problema. Os alunos realizavam a leitura colaborativa e, posteriormente, se dividiam em duplas ou trios. Formados os grupos, uma nova leitura do problema era realizada, e na sequência, a exposição de ideias, pelos membros do grupo, sobre possibilidades e argumentos que poderiam tornar viáveis a resolução do problema. O passo seguinte era envio das resoluções.

Na sequência, era realizada uma discussão coletiva das resoluções apresentadas em busca de um consenso. O papel da pesquisadora apareceu de forma mais ativa na etapa de formalização do conteúdo, em que a partir das resoluções enviadas, buscava-se sistematizar o conteúdo abordado para o problema. Após a exploração e a resolução dos problemas, uma discussão coletiva sobre como o problema poderia ser utilizado em sala de aula de matemática era realizada.

Allevato e Onuchic (2014) sugerem a elaboração de um novo problema, relacionado ao problema proposto inicialmente, como última etapa da MEAAM-RP. Dessa forma, era solicitado aos licenciandos, após o término de cada encontro, o envio de um problema (re)formulado, por eles ou por outros, que contemplasse os conceitos da análise combinatória abordados. Os problemas eram enviados através de um formulário *online*, que apresentava perguntas a serem respondidas sobre os encontros (Quadro 1). Com as questões, buscava-se compreender dúvidas e aprendizagens dos participantes.

Quadro 1: Instruções fornecidas aos licenciandos

Elabore ou proponha um problema que tenha relação com o conteúdo/conceito trabalhado no encontro. Explique de forma simples como trabalharia na sala de aula o problema que você elaborou/propôs.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Os participantes tiveram o prazo de uma semana para enviar os problemas, e a cada início de um novo encontro, os problemas enviados pelos formulários, eram apresentados e discutidos. A intenção era investigar se os futuros professores de matemática se sentiam motivados a elaborar seus próprios problemas ou apenas compreender a escolha por problemas prontos (encontrados em várias fontes de consulta). Foram enviados 25 problemas por meio de cinco formulários referentes a cinco encontros.

Análise dos dados

A análise de dados desse estudo foi feita tendo como referência a definição de atividades intelectuais de proposição de problemas matemáticos (PPM) de acordo com Cai e Hwang (2020), focando nas 25 diferentes situações-problema enviadas pelos futuros professores de matemática. Acreditamos que a PPM pode auxiliar na compreensão de como esses licenciandos elaboram e/ou escolhem problemas combinatórios. A partir dos problemas

enviados, examinamos 10 problemas elaborados e 15 problemas escolhidos, pelos participantes. No quadro a seguir, apresentamos a quantidade de problemas elaborados e escolhidos de acordo com o tema de cada encontro.

Quadro 2: Quantidade de problemas apresentados

Tema dos Encontros	Problemas elaborados	Problemas já existentes
Encontro 1 – Princípio Multiplicativo e Aditivo	4	2
Encontro 2 – Permutação	4	4
Encontro 3 – Combinação	2	3
Encontro 4 – Arranjo	1	3
Encontro 5 – Permutação com repetição	0	2

Fonte: Elaborado pelas autoras

Os problemas deveriam ser enviados no espaço de uma semana e mesmo com notificações e avisos da pesquisadora, alguns participantes, por motivos pessoais, não conseguiram enviar seus problemas. Ainda assim, foi perceptível a diminuição na quantidade de problemas enviados (do Encontro 1 para o Encontro 5), pois muitos participantes alegaram dificuldades em encontrar problemas parecidos com aqueles apresentados nos encontros. Cai et al (2015) descobriram em suas pesquisas que alunos e professores são capazes de propor problemas matemáticos interessantes e importantes, porém as habilidades de propor problemas como foram apresentados pode estar associada à compreensão do significado do conceito matemático envolvido.

Os aspectos considerados na análise foram: (i) se o problema havia sido elaborado ou escolhido e (ii) tipos de problema. Desse último aspecto, foram analisados se os licenciandos apresentaram: (1) problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas; (2) problemas, alterando ou reformulando-os e seguindo a proposta de atividades intelectuais para alunos na PPM. (CAI; HWANG, 2020).

Os problemas apresentados no primeiro encontro tinham como conteúdos principais os princípios multiplicativo e aditivo. Assim, de acordo com a última etapa da MEAAM-RP, os participantes da pesquisa deveriam enviar seus problemas relacionados a esses conteúdos.

Quadro 3: Problemas apresentados no Encontro 1

Princípio Aditivo: Dez finalistas de diferentes estados foram convidados para uma confraternização. Antes de iniciar a festa, cada finalista cumprimentará, com as mãos, todos os outros finalistas. Quantos cumprimentos haverá ao todo?
Princípio Multiplicativo: A professora Noemi deve montar o horário do seu Clube de Matemática. Há apenas uma turma no Clube e os alunos terão aulas às segundas, quartas e sextas, das 09h às 10h e das 10h às 11h. As disciplinas são: Aritmética, Geometria e Álgebra, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos Noemi pode montar esse horário?

Fonte: Clube de Matemática da OBMEP (<http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-aulas-do-clubes/>)

A seguir, apresentamos as análises a cerca desses problemas e relacionando com as categorias expostas acima.

Quadro 4: Problemas enviados após o Encontro 1

Encontro	Participante	Problema enviado	Categorias
1	P1	Assinale a alternativa correta. Alice possui 9 livros distintos, sendo 4 de Biologia, 2 de História e 3 de Matemática. O número de maneiras das quais Alice pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é: (a) 288 maneiras; (b) 24 maneiras; (c) 864 maneiras; (d) 1728 maneiras; (e) 9 maneiras	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P2	Utilizando as letras do seu primeiro nome, quantas combinações diferentes de palavras são possíveis formar a partir da permutação entre elas?	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os
	P3	Uma lanchonete tem uma promoção de combo com preço reduzido em que o cliente pode escolher 4 tipos diferentes de sanduíches, 3 tipos de bebida e 2 tipos de sobremesa. Quantos combos diferentes os clientes podem montar?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P4	Ricardo fará uma viagem cujo trecho será João Pessoa/Recife/João Pessoa de ônibus, avião, navio ou trem. Para curtir diferentes paisagens nessa viagem, ele decide que o meio de transporte da ida não é o mesmo da volta. De quantas maneiras Ricardo pode realizar a viagem?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P5	Para fazer uma interclasse de vôlei em uma escola, a professora de educação física separou os 8 times participantes em dois grandes chaveamentos, quatro times em cada lado da chave. Na primeira etapa acontecerá 4 jogos, na segunda etapa 2 jogos, e por fim, o jogo final, sendo que o time perdedor de cada jogo está automaticamente eliminado. Assim, quantas diferentes finais podemos ter?	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P6	A coordenação do curso de licenciatura em matemática apresentou, para os prováveis formandos, 5 disciplinas diferentes sobre educação matemática, 4 disciplinas diferentes sobre educação básica e 3 disciplinas diferentes sobre geometria. Foi solicitado que os alunos escolhessem 2 disciplinas, com a condição de que fossem sobre tópicos diferentes. De quantas maneiras é possível escolher?	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os

Fonte: Elaborado pelas autoras

Nesses primeiros problemas, podemos observar um equívoco conceitual entre o princípio multiplicativo e a permutação, visto que três problemas elaborados envolvem a permutação (P1, P2 e P6) e não o princípio multiplicativo. Os participantes que escolheram seus problemas, P3 e P4, conseguiram apresentar problemas diferentes da situação discutida nos encontros, porém esses são mais, facilmente, encontrados em livros didáticos. Ou seja, os alunos preferiram apresentar um problema relacionado a situações-problemas conhecidas como a escolha de tipos de lanche ou escolha de caminhos. O participante P5 foi o único que elaborou um problema seguindo o conceito abordado no encontro. As ações dos participantes

refletem um pouco de como foi o primeiro encontro com os problemas combinatórios pois, quase todos, se queixaram de dificuldades em entender o conteúdo de Análise Combinatória, tanto no Ensino Médio quanto nas aulas na Licenciatura.

No segundo encontro os problemas apresentados tinham como conceito principal a permutação.

Quadro 5: Problema apresentado no Encontro 2

<p>Permutação: Luísa está em uma categoria montada por sua cidade para receber a vacina contra a COVID-19. Porém junto com ela há mais pessoas. A fim de não ter problemas e nem risco de aglomerações, cada pessoa recebeu uma senha de espera. A senha é escrita em ordem crescente com 4 algarismos distintos, utilizando os algarismos 1, 4, 5 e 7.</p> <p>a) Luísa recebeu a senha 7415. Quantas senhas há na frente da senha da Luísa? Se colocarmos as pessoas em fila, de acordo com o número da senha, em que posição na fila ela estará?</p> <p>b) O posto de saúde gasta, em média, 10 min para vacinar cada pessoa. A vacinação começa às 8h seguindo o número da primeira senha, formada pelos algarismos acima, em que horário Luísa será vacinada?</p>
--

Fonte: Elaborado por uma das autoras

A seguir, no quadro 6, destacamos a análise a respeito dos problemas enviados.

Quadro 6: Problemas enviados após o Encontro 2

Encontro	Participante	Problema enviado	Categorias de análise
2	P1	Em uma escola, 6 alunos ficaram responsáveis por fazer uma apresentação musical, em que eles têm que se posicionar em uma fila de pessoas. Como calculamos todas as maneiras de posicionar esses alunos? Faça os cálculos.	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os
	P3	De quantas maneiras distintas podemos formar uma fila com 3 homens e 3 mulheres: a) Em qualquer ordem; b) Começando com um homem e terminando com uma mulher.	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os
	P7	Tomando como base a palavra UFPEL, resolva as questões a seguir. i) Quantos anagramas podem ser formados de modo que as vogais estejam sempre juntas? ii) Quantos anagramas podem ser formados com as letras UF juntas? iii) Quantos anagramas podem ser formados com as letras PEL juntas e nessa ordem?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P4	Problema elaborado a partir do comercial do WhatsApp que versava sobre a criptografia utilizada pelo aplicativo. Qual será a mensagem que ele recebeu? Escreva a mensagem que você pensa que foi recebida. Como esta mensagem foi enviada pelo WhatsApp ela precisa estar criptografada.	(i) problema elaborado (iii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P8	O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan “Juntos num só ritmo”, com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a	(i) problema escolhido (ii) problema escolhido totalmente diferente ao problema do encontro

	<p>logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.</p>  <p>De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?</p> <p>a) 15 b) 30 c) 108 d) 360 e) 972</p>	
P9	<p>Dispondo dos algarismos 2,3,4,5 e 6, quantos números distintos de 3 algarismos podem ser formados?</p>	<p>(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas</p>
P6	<p>Em uma sala há 8 professores de matemática, 10 de português e 4 de Biologia. Queremos formar grupos de dois professores de cada matéria. De quantas maneiras distintas podemos organizar esses grupos?</p>	<p>(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os</p>
P5	<p>Hoje, em nosso país, existem dois modelos de placas de veículos em circulação. A grande maioria dos carros, caminhões, motos ainda circulam com a placa formada por três letras seguidas de quatro algarismos e os veículos novos ou revendidos, têm que utilizar a placa da Mercosul, que é formada por três letras, um algarismo, uma letra e dois algarismos. Se considerarmos todas as letras do nosso alfabeto e os algarismos de 0 a 9, o número total de placas do modelo da Mercosul é quanto por cento maior do que o número de placas do modelo antigo?</p>	<p>(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas</p>

Fonte: Elaborado pelas autoras

Nos problemas, do quadro anterior, é possível constatar que houve uma variedade maior dos tipos de problemas apresentados. Em sua maioria, os problemas faziam relação com o tema do problema apresentado no encontro. Dos quatro problemas elaborados, três apresentaram uma reformulação de outros problemas já conhecidos. Podemos destacar a criatividade dos participantes, como P4 que elaborou um problema a partir do comercial de um aplicativo de mensagens. Em conversa com os participantes, alguns relataram que escolheram problemas em que eles tinham dúvidas enquanto alunos da Educação Básica, como foi o caso de P7.

O terceiro encontro apresentou dois problemas com o tema combinação, e os problemas apresentados seguem no quadro abaixo.

Quadro 7: Problemas apresentados no Encontro 3

<p>Um ônibus de excursão com vinte brasileiros e seis estrangeiros é parado pela Polícia Federal de Foz do Iguaçu para vistoria de carteira de vacinação. O funcionário escolhe, ao acaso, três passageiros para terem as carteiras vistoriadas.</p> <p>a) Como podemos calcular todas possíveis formas de formar esse trio de passageiros? b) E se o trio for apenas de brasileiros? De quantas formas este trio pode ser formado?</p>
<p>Passando pelo site do Banco Caixa Econômica Federal é possível encontrar a seguinte tabela de probabilidades. A probabilidade aqui está definida como uma taxa, que representa a chance de ganhar o prêmio, calculada como a divisão entre o número de casos favoráveis e o total de possibilidades de sorteios do prêmio. Sabendo que o jogo é feito com a escolha de pelo menos 6 números dentre as possibilidades de 1 até 60. Responda:</p> <p>a) Como calcular a probabilidade de ganhar o prêmio da Sena (acertar os seis números), Quina (acertar 5 números) e Quadra (acertar 4 números) com um jogo de 6 números? b) Para fazer o jogo com 6 números pago R\$4,50. Por qual motivo a escolha de sete números me custa R\$31, 50? c) A estimativa de prêmio do próximo jogo da Sena é de R\$6 milhões. Para fazer o jogo com 6 números pago R\$4,50, quanto eu tenho que dispor de dinheiro para jogar todas as possibilidades do sorteio? Valeria a pena jogar todos as combinações possíveis? Senão, supondo que somente pudesse ganhar sozinho, quanto deveria ser o prêmio para que valesse a pena fazer todas as apostas possíveis para a Sena?</p>

Fonte: SPREAFICO; SILVA (2021, p.14)

No próximo quadro apresentamos os problemas enviados após o terceiro encontro. Podemos destacar que muitas situações-problema versavam sobre a ideia de comissões, semelhante a um dos problemas explorado nesse encontro, ou seja, os participantes conseguiram compreender o conceito, porém mantiveram a ideia de reformular ou escolher problemas com essa temática.

Quadro 8: Problemas enviados após o Encontro 3

Encontro	Participante	Problema enviado	Categorias de análise
3	P1	Para conter os incêndios no Pantanal, provocados por fazendeiros para plantar soja e criar gado, um grupo de pesquisadores e bombeiros se reuniu para organizar estratégias que funcionassem com mais eficiência. Durante a reunião também fizeram a escalação dos bombeiros que atuariam em cada turno. Para o primeiro turno, eles colocariam 7 dos 12 bombeiros presentes. Determine o número de maneiras que os 7 bombeiros podem ser escalados.	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P3	Uma empresa é formada por 6 sócios brasileiros e 4 japoneses. De quantos modos podemos formar uma diretoria de 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 japoneses?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os
	P5	Na modalidade Street Skateboarding feminino, há 20 participantes de 12 países diferentes. Sendo a probabilidade a taxa calculada efetuando a razão do número de casos favoráveis, pelo número de casos possíveis, qual a probabilidade	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões

		de ao menos uma atleta brasileira estar no pódio?	matemáticas ou diagramas
	P9	Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres. a) Quantas comissões podem ser formadas? b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os
	P4	Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pode receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. Quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas

Fonte: Elaborado pelas autoras

Foi possível constatar que o participante P5 apresentou problemas criativos utilizando-se de assuntos atuais, como por exemplo as Olimpíadas, que na época da pesquisa estava ocorrendo, para propor um problema. A partir desse encontro é perceptível uma confiança em elaborar problemas, comparado aos primeiros encontros. Um problema foi elaborado relacionando combinação com Probabilidade.

O encontro 4 tinha como tema principal uma situação sobre arranjo e no quadro a seguir, apresentamos o problema exposto no encontro.

Quadro 9: Problemas apresentados no Encontro 4

<p>O objetivo deste jogo é descobrir a senha. A senha é composta por 4 cores distintas. Clique em cada um dos 4 quadrados para selecionar uma cor dentre 6 disponíveis, e em seguida clique no botão verificar. Sua tentativa será salva nas linhas com 4 bolinhas, e automaticamente é gerado uma análise como pode ser conferida na tela do jogo. O jogador deverá observar análise feita antes de seguir para a próxima tentativa. Vence o jogador que acertar a senha com o menor número de tentativas.</p> <p>a) Qual foi o maior número de tentativas feitas pelas duplas para acertar a senha? b) Seguindo todas as dicas, é possível saber qual seria o número máximo de tentativas para acertar a senha? Se sim, determine esse número. c) Quantas senhas são possíveis formar neste jogo? d) Caso o jogo não fornecesse as dicas qual seria o número máximo de tentativas para acertar a senha? e) Qual seria o número de senhas possíveis se fosse permitido repetir as cores? f) Levando em conta que quanto mais possibilidades de senhas mais segurança para os usuários, já que descobrir a senha por tentativas se torna uma tarefa difícil, seria melhor uma senha que permitisse ou não repetição de caracteres? g) Dada uma senha do tipo dado no exercício, quais modificações poderiam ser feitas em sua construção para tornar mais difícil de determiná-la?</p>
--

Fonte: SPREAFICO; SILVA (2021, p.9)

No quadro seguinte, apresentamos os problemas enviados pelos alunos. O primeiro resultado que pudemos observar foi a diminuição da quantidade de problemas enviados. Com base em estudos apresentados por Cai et al (2015), os alunos são capazes de melhorar os

problemas que propõem quando têm experiência em resolver tais problemas ou ainda estimulados por contextos informais, como imagens, que podem deixar mais espaço para a exploração do problema. Podemos inferir que talvez o problema sugerido no encontro 4 falhou em contemplar características desses estudos.

Quadro 10: Problemas enviados após o Encontro 4

Encontro	Participante	Problema enviado	Categorias de análise
4	P1	As senhas bancárias são construídas com 4 dígitos. Durante a criação da senha, a gerente da Karla recomendou que ela criasse uma senha com 4 dígitos, todos distintos entre si. Suponha que Karla seguiu a recomendação de sua gerente, assim, qual o número de senhas distintas que ela pode criar?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os
	P7	Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de: a) uma combinação e um arranjo, respectivamente. b) um arranjo e uma combinação, respectivamente. c) um arranjo e uma permutação, respectivamente. d) duas combinações. e) dois arranjos.	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P3	Por motivos de segurança, Renato decidiu alterar a sua senha das redes sociais. Para que ele não se esqueça de suas senhas, ele sempre escolhe usar três letras do seu nome seguidas do dia e do mês de nascimento. Sabendo que a senha antiga era “reno203”, o total de senhas possíveis que ele pode criar para essa nova senha é:	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas, alterando ou reformulando-os
	P5	Na modalidade Street Skateboarding feminino, há 20 participantes de 12 países diferentes. De quantas maneiras diferentes o pódio pode estar ao fim da competição? Sendo a probabilidade a taxa calculada efetuando a razão do número de casos favoráveis, pelo número de casos possíveis, qual a probabilidade de uma atleta brasileira ficar na segunda colocação?	(i) problema elaborado (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas

Fonte: Elaborado pelas autoras

Nos quatro problemas apresentados, percebemos que apenas um participante (P5) elaborou um problema (Quadro 10) e que seguiu uma linha de pensamento parecida com o problema que havia apresentado anteriormente (Quadro 8). Como explicação, P5 relatou que pensava em seguir uma linha de pensamento de lista de problemas e tentar aproveitar as possibilidades de problemas diferentes para um mesmo tema. Segundo Cai e Hwang (2020) uma das atividades da formulação de problemas matemáticos é a reformulação de problemas alterando problemas existentes. Sobre os problemas escolhidos, os participantes P1 e P3 escolheram problemas semelhantes à situação apresentada nos encontros, seguindo a ideia de senhas. O participante P5 escolheu um problema que ele assumiu ter dificuldades para resolver sozinho, por esse motivo escolheu o problema para que fosse discutido com todo o grupo.

O encontro 5 apresentou uma situação sobre permutação com repetição. O problema apresentado no encontro está no quadro abaixo.

Quadro 11: Problemas apresentados no Encontro 4

<p>João trabalha como delivery de um aplicativo de entrega de comida. Sabendo que não pode gastar muito tempo em suas corridas, já que recebe muito pouco por cada entrega, João precisa realizar o trajeto de forma rápida e sem engarrafamentos, para não atrasar. Uma pessoa faz o pedido de um lanche na Unesp. A lanchonete onde João trabalha fica na esquina entre a rua 10B e a avenida 14A (ponto B).</p> <p>a) Há pelo menos um trajeto mínimo que João pode fazer para realizar a entrega? Descreva-o. b) De quantas maneiras diferentes João pode se deslocar fazendo um trajeto mínimo?</p>

Fonte: Elaborado por uma das autoras

Relacionado a esse encontro apenas dois problemas foram enviados e seguem no quadro 12. Esse foi o último encontro em que os alunos enviaram seus problemas.

Quadro 12: Problemas enviados após o Encontro 5

Encontro	Participante	Problema enviado	Categorias de análise
5	P3	Em uma prova composta de 20 questões envolvendo V ou F, de quantas maneiras distintas teremos doze respostas V e oito respostas F?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas
	P4	Quantas soluções inteiras e não negativas tem a equação $x + y + z + w = 8$?	(i) problema escolhido (ii) apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas

Fonte: Elaborado pelas autoras

De forma surpreendente os problemas enviados foram diferentes das situações propostas nos encontros, mas tão interessantes quanto. O problema escolhido por P4 não é contextualizado, mas se relaciona com outros conceitos da matemática, como o estudo das equações. Alguns participantes relataram dificuldades para elaborar e até mesmo escolher problemas com esse conceito.

Considerações

O objetivo desse artigo foi apresentar uma investigação sobre como futuros professores de matemática escolhem ou elaboram problemas para que sejam utilizados em sala de aula. O conteúdo que norteou a seleção dos problemas foi a Análise Combinatória.

A partir dos resultados obtidos, pudemos observar que os participantes tinham dificuldades em compreender os conceitos a partir das situações dadas e dessa forma, pode ter levado a uma maior dificuldade para relacionar novos problemas às situações já resolvidas.

Com o decorrer dos encontros, observamos que essa dificuldade foi sendo amenizada, porém não superada.

Em relação à elaboração de problemas, identificamos formulações criativas envolvendo ideias diferentes, ainda que em menor número que os problemas escolhidos, os problemas propostos elaborados se destacaram por terem uma temática atual e serem elaborados, de forma correta, conceitualmente. Ao optarem pelas escolhas de problemas prontos ao invés de formularem novos problemas os futuros professores deixaram de considerar as condições histórico-sociais da sala de aula de matemática.

Portanto, a compreensão conceitual e compreensão pedagógica dos futuros professores, sobre a matemática relevante, foram identificadas como fatores importantes que podem tanto apoiar quanto dificultar a proposição de problemas matemáticos, corroborando com estudos apresentados por Cai e Hwang (2019). Acreditamos que a proposição de problemas possa contribuir para aprendizagem profissional dos licenciandos em matemática.

As limitações desse estudo envolvem o pequeno número de participantes e o fato de ser desenvolvido em apenas um semestre, o que reforça a necessidade de ampliar para outros estudos.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (org). **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014.
- BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.
- CAI, J., & CIFARELLI, V. V. Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solved their own mathematical problems. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, 27(3), p. 43–72, 2005.
- CAI, J. Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: a representational Discussion. In: Sriraman, B., English, L. (eds). **Theories of Mathematics Education**, Advances in Mathematics Education, Springer, p.251-258, 2010.
- CAI J., HWANG S., JIANG C., SILBER S. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: Singer F., Ellerton N., Cai J. (eds) **Mathematical Problem Posing**. Research in Mathematics Education. Springer, New York, 2015.

- CAI, J.; HWANG, S. **Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research**. Elsevier: International Journal of Educational Research, [s. l.], v. 102, p. 101391, 2020.
- Problema: Aulas do Clube. **Clubes de Matemática da OBMEP**, 2022. Disponível em: < <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-aulas-do-clube/>>. Acesso em: 15 de abr. de 2022.
- ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In: Wittrick, M. C.(org.). **Handbook of research on teaching**. New York: Macmillan, p. 119-161, 1986.
- KONTOROVICH, I., KOICHU, B., LEIKIN, R., BERMAN, A. An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. **Journal of Mathematical Behavior**. 31, p. 149–161, 2012.
- National Council of Teacher of Mathematics. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 1989.
- National Council of Teachers of Mathematics. **Professional standards for teaching mathematics**. Reston, VA: Author, 1991.
- SILVER, E. A., MAMONA-DOWNS, J., LEUNG, S. & KENNEY, P. A. Posing mathematical problems: An exploratory study. **Journal for Research in Mathematics Education**, 27(3), p. 293–309, 1996.
- SPREAFICO, E.V.P., SILVA, K.C.P. **Análise Combinatória**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2021.
- YACHEL, E., COBB, P. Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**. Vol. 27, No. 4, p. 458- 477, 1996.
- YANG, X., et al. Relationship between pre-service mathematics teachers’ knowledge, beliefs and instructional practices in China. **ZDM Mathematics Education** 52, 281–294, 2020.

Biografia Resumida

Ana Carolina Ferreira Rangel: Mestranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), Rio Claro/SP. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Integrante do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas. Em suas pesquisas, trabalha com Formação de Professores que

ensinam matemática, Resolução de Problemas e Comunidades de Prática.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8739256918429513>

Contato: acf.rangel@unesp.br

Flávia Sueli Fabiani Marcatto: Professora Associada no Instituto de Matemática e Computação (IMC) da Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI. Atua em Ensino, Pesquisa e Extensão na área de Educação matemática. Docente colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro-SP. Membro do Grupo de Pesquisa VIDDA-M (Visualizando, Investigando e Discutindo Ambientes de Aprendizagem Matemática).

Lattes: lattes.cnpq.br/3185119736199337

Contato: flaviamarcatto@unifei.edu.br