

Proposição de Problemas: possibilidades e relações com o trabalho através da Resolução de Problemas

Norma Suely Gomes Allevato 

Janaína Poffo Possamai 

Resumo

O estudo apresentado neste artigo teve como objetivo analisar as possibilidades da proposição de problemas considerando-a em suas relações com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacando, em particular, as contribuições decorrentes dessa associação. Para tanto, discute-se o contexto da atividade de proposição de problemas, que pode ser realizada antes, durante ou depois da resolução de problemas, enfatizando as possibilidades de desenvolvê-la como primeira e/ou última etapa da Metodologia. O estudo refere-se a uma investigação de natureza qualitativa, constituída a partir de uma prática educativa de proposição de problemas, desenvolvida com doutorandos, após a resolução de um problema gerador. Os resultados indicam que a proposição de problemas, como última etapa da Metodologia, potencializa a valorização das resoluções desenvolvidas pelos estudantes, proporcionando a construção de novas aprendizagens a partir, inclusive, de soluções incorretas. E, ademais, favorece processos avaliativos acerca das aprendizagens decorrentes (ou não) do trabalho com o problema gerador. Finalmente, enfatiza-se a importância de estabelecer objetivos pedagógicos claros para a atividade de proposição de problemas, de modo que não se exauam suas potencialidades e efetivos resultados verificados para os processos de ensino e de aprendizagem.

Palavras-chave: Proposição de problemas, Resolução de Problemas, Aprendizagem matemática.

Problem Posing: possibilities and relationships with work through Problem Solving

Norma Suely Gomes Allevato

Janaína Poffo Possamai

Abstract

The study presented in this article aimed to analyze the possibilities of problem posing considering it in its relations with the Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving Methodology, highlighting, in particular, the contributions resulting from this association. Therefore, the context of the problem posing activity is discussed, which can be performed before, during or after problem solving, emphasizing the possibilities of developing it as the first and/or the last step of the Methodology. The study refers to an investigation of a qualitative nature, constituted from an educational practice of problem posing, developed with doctoral students, after solving a generating problem. The results indicate that the problem posing, as the last step of the Methodology, enhances the appreciation of the solutions developed by the students, providing the construction of new learning from, even, incorrect solutions. And, in addition, it favors evaluative processes about the learning resulting (or not) from working with the generating problem. Finally, the importance of establishing clear pedagogical objectives for the problem posing activity is emphasized, so that its potential and effective results are not dissipate from the teaching and learning processes.

Keywords: Problem posing, Problem Solving, Mathematics learning.

Introdução

Os impactos educacionais da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021) têm sido analisados em várias pesquisas envolvendo estudantes da Educação Básica (BARROS; JUSTULIN, 2020; COSTA; ALLEVATO, 2014; GONCALVES; ALLEVATO, 2018; POSSAMAI; SILVA, 2020) e Ensino Superior (GIESELER *et al.*, 2021; LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2018). Os resultados dessas pesquisas têm apontado para o potencial no desenvolvimento da criatividade e autonomia dos estudantes, para a melhora nos processos de escrita e leitura nas aulas de Matemática, e para a confiança e interesse dos estudantes, favorecendo o trabalho colaborativo e cooperativo e, também, possibilitando que se estabeleça conexões com outras áreas do conhecimento, com os diversos campos da Matemática e com situações do cotidiano. (ALLEVATO, ONUCHIC, 2019).

Assim como no Brasil, pesquisas em diversos países (CAI; LESTER, 2012; POLYA, 1988; YAO; HWANG; CAI, 2021) ressaltam que “[...] a resolução de problemas é, e deve ser, uma parte importante do que significa ensinar e aprender matemática” (LILJEDAH; CAI, 2021, p. 723) sendo indicada nos currículos (BRASIL, 2018; NTCM, 2000; SINGAPORE, 2019) tanto como habilidade a ser desenvolvida como veículo através do qual a Matemática é aprendida.

Mais recentemente, as prescrições curriculares também têm indicado a associação da resolução com a elaboração de problemas pelos estudantes, destacando sua importância na grande e crescente quantidade de vezes que esses processos são indicados como habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental e aprofundadas no Ensino Médio (BRASIL, 2018).

É nessa associação que se busca colocar o foco do estudo apresentado neste artigo, discutindo as potencialidades educacionais da inserção da proposição de problemas pelos estudantes no âmbito da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podendo ser realizada antes ou depois da resolução de um problema gerador. O problema gerador é um dos princípios que norteiam a Metodologia²⁵, sendo “[...] o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 47).

Assim, tem-se como objetivo deste estudo, analisar as contribuições da proposição de problemas pelos estudantes associada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

²⁵ No presente texto, utilizaremos apenas a palavra Metodologia (com letra maiúscula) para designar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a fim de evitar repetições.

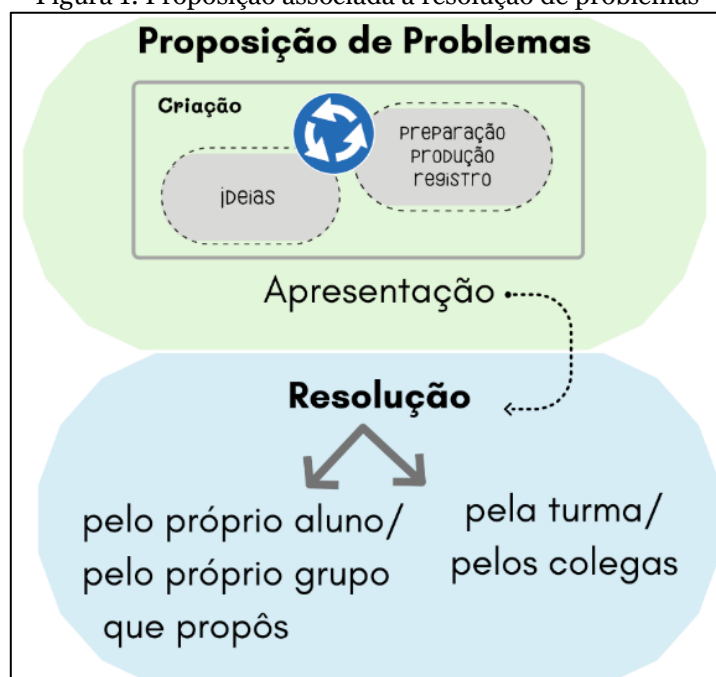
Desse modo, na sequência discute-se a proposição de problemas, como atividade que pode ser desenvolvida antes, durante ou depois da resolução de problemas; apresenta-se a caracterização metodológica da investigação realizada com doutorandos; o relato e análise da prática desenvolvida e, por fim, as considerações finais.

Quando os estudantes propõem os problemas!

Diversos termos têm sido utilizados para denotar a proposição de problemas pelos estudantes; em língua inglesa frequentemente se denomina *problem posing* (CAI; HWANG, 2020; CAI *et al*, 2020; SILVER, 1994). No Brasil, os pesquisadores utilizam elaboração, formulação, proposição para denotar a criação de problemas pelos estudantes, mas sem um claro posicionamento sobre seus significados, não havendo um consenso ou significação definida para esses termos (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022).

A partir dos estudos que realizamos com base nas produções brasileiras e internacionais, e de significações linguísticas inerentes ao idioma brasileiro, estamos utilizando a expressão *proposição de problemas* para denotar todo o conjunto de ideias que constitui os processos envolvendo a *criação de problemas*, que inicia com a organização e construção das primeiras ideias matemáticas e da estrutura de constituição do problema – *formulação*; e avança para a sua expressão, na qual se estabelece o enunciado, associando as linguagens materna e matemática – *elaboração*. Então, a proposição segue para a *apresentação* do problema criado a um potencial resolvedor.

Figura 1: Proposição associada a resolução de problemas



Fonte: Elaborado pelas autoras

Cabe esclarecer que às atividades de proposição de problemas, diversos objetivos educacionais podem ser associados: relacionados com a educação integral dos estudantes, com a própria aprendizagem de como criar problemas, e como um meio de ensinar Matemática (LILJEDAHN; CAI, 2021).

Esses objetivos podem ser foco da atividade de proposição de problemas de forma independente ou integrada, pois como ressalta Getzels (1979, p. 169, tradução nossa): “[...] um problema bem formulado é ao mesmo tempo resultado do conhecimento, um estímulo para mais conhecimento e é, ele próprio, conhecimento”.

Diversos autores (ENGLISH, 2020; KOICHU, 2020; XU *et al.*, 2020) têm ressaltado que a proposição de problemas não deve ser utilizada como um fim em si mesma, ou seja, como um exercício ou atividade recreativa, em que os estudantes são colocados para criar um problema como solicitação do professor, sem relação com outros objetivos educacionais. É importante que a proposição seja associada a outras atividades educativas, como a modelagem matemática, investigações matemáticas ou resolução de problemas.

Neste artigo, discutimos a associação da proposição de problemas com a resolução de problemas. Assim, cabe destacar que ela pode acontecer antes, durante ou depois da resolução de problemas. Durante a resolução de um problema, a proposição de problemas pode acontecer, mesmo que não tão explicitamente, quando os estudantes formulam problemas secundários para refletir sobre estratégias de resolução do problema “maior” proposto (POLYA, 1988).

Neste estudo, concentramo-nos em pensar sobre as diferenças educacionais de se trabalhar com a proposição de problemas antes ou depois da resolução de problemas, pois, conforme já ressaltava Getzels (1979, p. 170, tradução nossa), “vale a pena estudar as diferenças entre o ato de pensar na resolução de problemas que começa com um problema já formulado e o que deve começar com a descoberta ou criação do próprio problema”.

Zhang e Cai (2021, p. 962) destacam que o ensino através da proposição de problemas é semelhante ao ensino através da resolução de problemas, mas que “[...] no ensino através da proposição de problemas, a aprendizagem ocorre durante o processo de proposição de problemas matemáticos pelos alunos e a discussão em sala de aula dos problemas propostos”.

Neste estudo destacamos a proposição de problemas, especialmente, no contexto da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas²⁶. Cabe esclarecer que nessa metodologia:

[...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida,

²⁶ Metodologia desenvolvida pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP, sob coordenação da professora doutora Lourdes de la Rosa Onuchic.

é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema [o problema gerador] que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 85)

Allevato e Onuchic (2021, p. 52) sugerem dez etapas para sua implementação em sala de aula: “(1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas”.


Na primeira etapa da Metodologia, o que comumente acontece é a proposição dos problemas realizada pelos professores, selecionando-os de livros didáticos, pesquisando na internet ou em outras fontes, assim como há os que elaboram os problemas. Porém, Allevato (2014) ressalta que o professor também pode aceitar um problema proposto pelos próprios estudantes. Em Costa e Allevato (2021) há o relato de uma situação de aula em que uma pergunta feita pelo aluno ao professor constituiu-se em problema gerador, desencadeando o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de conteúdos de trigonometria. Essa, então, é uma das oportunidades de associação da proposição de problemas pelos estudantes à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Assim, o que vai possibilitar analisar se a proposição de problemas pode se constituir como a primeira etapa da metodologia é a relação dos problemas criados com o potencial resolvidor. O resolvidor pode ser o próprio estudante ou o grupo de estudantes que criou o problema, pode ser outro estudante ou grupo (quando eles trocam os problemas entre eles), ou mesmo toda a turma, em plenária. Se o resolvidor já conhecer um método ou técnica para resolver o problema, a tarefa deixa de ser para ele um problema, passando a ser um exercício, não justificando e nem caracterizando a utilização da metodologia.

Por vezes, os problemas criados pelos estudantes podem não atender ou envolver um conteúdo ou procedimento matemático pretendido, pelo professor, para ser abordado na formalização, que acontece após a resolução dos problemas. Isso dependerá, com maior ou menor força, da natureza da atividade de proposição de problemas proposta pelo professor.

No Quadro 1 são apresentadas algumas atividades de proposição de problemas que podem ser utilizadas, e cabe refletir se (e quais) poderiam constituir o ponto de partida para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Quadro 1: Diferentes pontos de partida para a proposição de problemas.

 <p>(a)</p>	<p>_____.</p> <p>Quantos tempo falta para terminar a aula?</p> <p>(b)</p>	<p>Mariana recebeu uma encomenda de 120 peças.</p> <p>(c)</p>
--	---	---

Fonte: Elaborado pelas autoras

No Quadro 1(a), solicita-se que os estudantes criem problemas a partir da imagem fornecida. Nessa atividade tem-se um ponto de partida que, possivelmente, remeterá a problemas que irão envolver as operações com números racionais na forma decimal no processo de resolução. Essa é uma atividade de proposição de problemas que tem potencial para ser inserida como primeira etapa da Metodologia, ao se considerar que o professor tenha como intenção formalizar, por exemplo, os procedimentos relacionados às operações com números racionais e que este conteúdo ainda não tenha sido apresentado aos estudantes.

Outro aspecto interessante, a ser definido previamente, é para quem o estudante criador irá apresentar o problema. Pode-se, por exemplo, combinar que o problema será resolvido por outro colega ou grupo de estudantes, ou que o professor irá selecionar alguns problemas criados para serem resolvidos e discutidos pela turma e, assim, se tornarem geradores de novas aprendizagens.

Nesse aspecto, Silver (1994) reitera que o interesse pessoal não é a única motivação para a proposição de problemas, e que dentro de uma sala de aula os estudantes podem ser encorajados a proporem problemas que os colegas possam achar interessantes ou difíceis de resolver. O autor ressalta, que os estudantes ficam verdadeiramente engajados na atividade de proposição de problemas quando sabem que irão compartilhar seus problemas com os colegas, impactando na qualidade dos problemas criados.

A partir da proposta do Quadro 1(b), os estudantes são convidados a criar problemas para a pergunta que foi dada, elaborando um anúncio que converge para esse questionamento. E na proposta do Quadro 1(c), tem-se uma frase que deve ser incluída no enunciado do problema a ser criado. Nesses dois pontos de partida tem-se uma estrutura mais aberta desencadeadora da proposição de problemas, podendo envolver as operações fundamentais, proporcionalidade, regra de três, porcentagem, funções, entre outros objetos de conhecimento matemático. Nesses casos, é mais difícil para o professor prever como serão os problemas propostos pelos estudantes, a não ser que ele os direcione para determinado conteúdo ou procedimento. Uma estratégia possível é o professor analisar os problemas criados ao discuti-los com a turma, identificando se algum deles possibilita que novos conhecimentos matemáticos sejam construídos como resultado de sua resolução, e conduzindo a turma às etapas da Metodologia.

Outra possibilidade de envolver os estudantes na proposição de problemas, associada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, está na décima etapa, *de proposição e resolução de novos problemas*. Conforme orientam Allevato e Onuchic (2021, p. 54), “esta última etapa pode, inclusive, configurar-se em um momento em que é oferecida aos estudantes a oportunidade de elaborarem problemas, a partir das experiências vivenciadas nas etapas anteriores”.

Nessa etapa, a proposição de problemas, pelos estudantes, pode ter como finalidade avaliar as aprendizagens decorrentes do problema gerador ou, ainda, analisar e contemplar resoluções incorretas do problema gerador.

No contexto de avaliar as aprendizagens desenvolvidas, o professor pode envolver os estudantes na reelaboração do problema gerador. O professor pode pedir que alterem a pergunta, mantendo o método de resolução; ou que proponham um problema semelhante ou mais difícil que o problema gerador, dentre outras possibilidades. Desse modo, esse contexto da reelaboração de problemas também pode ter como objetivo ampliar e consolidar aprendizagens, e diferentes atividades podem ser envolvidas (ALLEVATO; POSSAMAI, 2022, no prelo).

Outra possibilidade é retomar as resoluções que foram discutidas em plenária, inclusive as incorretas, utilizando-as como potenciais pontos de partida para a proposição de problemas. O professor poderia pedir aos estudantes que proponham problemas que se adequem à resolução ou ao resultado incorreto que foi obtido para o problema gerador, questionando-os sobre qual o problema que teria aquela resolução, ou seja, quais condições devem mudar no problema gerador para se obter um problema para essa resolução ou resultado.

Nessas formas de implementar a proposição de problemas como última etapa da metodologia, é importante ressaltar que a resolução dos problemas criados e apresentados pelos estudantes seja, também, realizada, com a troca dos problemas entre os estudantes ou com a discussão em plenária com a turma. Nesse aspecto, Koichu e Kontorovich (2013, p. 84, tradução nossa) destacam, como resultado do estudo que realizaram, que problemas de qualidade são propostos quando os criadores conseguem “estabelecer relações pessoais com a tarefa e fazer seu trabalho progredir além do que era necessário para cumpri-la formalmente”. Mas para que isso aconteça, é necessário que a discussão dos problemas propostos não fique restrita aos que os criaram ou aos professores que os avaliam, mas, também, levar em consideração as relações com potenciais resolvidores.

Cabe destacar que, assim como o entendimento do que é um problema se reflete sobre as práticas educativas dos professores em relação à Resolução de Problemas (ALLEVATO, 2014; POSSAMAI *et al.*, 2021), a compreensão da proposição de problemas e de suas finalidades educativas associada à resolução de problemas, tem implicações sobre os

resultados da aprendizagem dos estudantes. Chen e Cai (2020, p. 1, tradução nossa) corroboram com essa ideia, indicando que promovendo essas reflexões, “[...] os professores mudarão sua prática educacional, suas crenças e conhecimentos, melhorando assim o aprendizado do aluno”.

Nessa perspectiva insere-se o presente estudo, em que investigamos como doutorandos, que atuam como professores, atribuem sentido para a proposição de problemas como última etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, conforme é apresentado na sequência.

Caracterização metodológica

A investigação apresentada neste artigo, foi realizada no segundo semestre de 2021, envolvendo oito professores doutorandos da disciplina de Resolução de Problemas no Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo. A disciplina foi ofertada na modalidade de ensino remoto, via plataforma ZOOM²⁷, oferecida pela universidade devido à situação da pandemia causada pela COVID-19.

Este estudo, de natureza qualitativa, tem o fenômeno investigado no ambiente natural (as aulas da disciplina), procurando atribuir sentidos e interpretações de acordo com as discussões e produções dos doutorandos (LÜDKE; ANDRÉ, 2012).

Cabe ressaltar que a primeira autora deste artigo era a docente responsável pela disciplina, e a segunda autora, como estagiária de pós-doutorado sob sua supervisão, atuava conjuntamente na aula que foi objeto de análise deste estudo. Assim, as pesquisadoras envolveram-se na discussão e na coleta de dados, que aconteceu por meio da gravação da aula e pelos registros produzidos pelos doutorandos.

Inicialmente os doutorandos envolveram-se na resolução de alguns problemas, com discussões em pequenos grupos, em salas virtuais criados pelo ZOOM e, também, em plenária com toda a turma e com as pesquisadoras. O tema Proposição de Problemas foi discutido em aula, a partir da leitura de alguns textos. Os doutorandos também criaram problemas, neste caso, individualmente, como tarefa que foi realizada extraclasse e enviada às pesquisadoras por e-mail. Desse modo, o material analisado neste estudo, acerca da elaboração dos problemas, refere-se aos registros produzidos pelos doutorandos nessa atividade.

Na análise aqui desenvolvida, a discussão faz uma interlocução com outras produções científicas da área, visando ampliar as reflexões sobre a associação da proposição com a resolução de problemas, em especial, sobre as relações com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.


²⁷ ZOOM é uma plataforma de videoconferências que permite a realização de reuniões virtuais.

Relato e análise

Após discussões e leituras de artigos relacionados com a Resolução e Proposição de Problemas, os doutorandos foram envolvidos em uma atividade que lhes propiciasse vivenciar as etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Iniciando a implementação da Metodologia, foi proposto que os doutorandos resolvessem o problema apresentado no Quadro 2.

Quadro 2: O problema do ônibus

	<p>Um ônibus saiu da cidade A com algumas pessoas já embarcadas. Ao parar em B, desceram 2 pessoas e subiram 10; em seguida, na parada C, desceram 6 pessoas e subiu uma quantidade de pessoas que dobrou o número de pessoas no veículo. A terceira parada foi em D, onde desceu 1 pessoa e não subiu ninguém. De volta ao A, desceram todas as 53 pessoas do ônibus. Quantas pessoas havia no ônibus no início da viagem?</p>
---	---

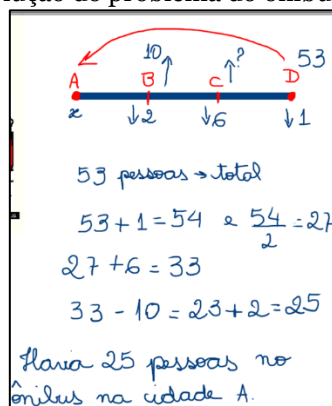
Fonte: Autor desconhecido.

Os doutorandos tiveram um tempo para leitura individual do problema e, então, foram conduzidos para salas virtuais para discutir e resolver o problema em pequenos grupos, de três ou quatro integrantes. Após esse trabalho em grupo, voltaram para a sala virtual principal da disciplina e apresentaram suas resoluções aos demais colegas. Explicaram oralmente suas resoluções, compartilharam arquivos (via WhatsApp²⁸) ou compartilhavam telas com as resoluções (via Zoom), havendo, concomitantemente, os momentos da plenária e de busca de consenso sobre as resoluções desenvolvidas.

Esse é um aspecto a ser ressaltado, frente à utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto de aulas remotas, uma vez que, dadas as limitações do ambiente virtual, algumas etapas exigem adaptação, conforme discutido por Bertotti Junior e Possamai (2020). Na aula que desenvolvemos, a adaptação se deu no desenvolvimento conjunto dessas etapas, pois as resoluções não são apresentadas como em uma lousa, em que todas são expostas ao mesmo tempo. O grupo G1, composto pelos doutorandos DY e DF, apresentou a resolução indicada na Figura 2:

²⁸ WhatsApp é um aplicativo de mensagens instantâneas e chamadas de voz. Além de mensagens de texto, os usuários podem enviar imagens, vídeos e documentos.

Figura 2: Resolução do problema do ônibus pelo grupo G1



Fonte: Acervo de pesquisa

A resolução apresentada por esse grupo envolveu a utilização de operações aritméticas, realizadas na ordem inversa com que as informações aparecem no texto. Nessa ordem, são trabalhadas as operações inversas e a ideia de que a informação: “em C dobrou a quantidade de pessoas no veículo”, foi entendida e aceita pelo grupo como associada à divisão por dois. Cabe ressaltar que o uso da igualdade na última linha da resolução está incorreto e pode comprometer o trabalho algébrico, cabendo uma discussão a respeito da compreensão do conceito de igualdade matemática.

O grupo G2, composto pelos doutorandos DS e DK, apresentou a resolução indicada na Figura 3.

Figura 3: Resolução do problema do ônibus pelo grupo G2

Somar todos os valores das pessoas que desceram e depois subtrair por 10 (subiram)

$$- 2 - 6 - 1 = - 9$$

$$- 9 + 10 = 1$$

Como no problema diz que sobraram 53 pessoas:

$$53 - 1 \text{ (resultado da conta anterior)} = 52.$$

Depois, considerando que em algum momento subiu metade: $52/2=26$

Assim chegando à quantidade de pessoas que iniciou a viagem: 26.

Mas, esse resultado está equivocado, pois a média deveria ter sido feita antes da última pessoa descer, ficando assim:

$$(x - 2 + 10 - 6) \cdot 2 - 1 = 53$$

$$(x + 2) \cdot 2 - 1 = 53$$

$$2x + 4 - 1 = 53$$

$$2x = 53 - 3$$

$$x = 50/2$$

$$x = 25$$

Fonte: Acervo de pesquisa

Na plenária e busca de consenso, o grupo G2 explicou aos demais colegas que a primeira resolução, apresentada na Figura 2, foi avaliada por eles como incorreta quando fizeram a verificação, “prova real”, ao utilizar o resultado retomando os dados do problema. Na sequência, então, o grupo optou por resolver algebricamente utilizando uma equação do primeiro grau.

Inicialmente o grupo não havia apresentado o primeiro registro, errôneo, mas quando o grupo G3 apresentou sua resolução (Figura 4), o grupo G2 resolveu retomar e discutir seus erros como forma de questioná-los. Esse momento de socialização das resoluções e respostas, em plenária, envolveu-os na discussão sobre erros e sobre superação de concepções erradas, de forma colaborativa. Ao compartilhar resoluções, se promove “reflexões, debates e troca de ideias entre os alunos, e entre o professor e os alunos, num processo colaborativo de construir conhecimento” (GONÇALVES; ALLEVATO, 2018, p. 42).

Essa é uma contribuição muito relevante dessa forma de trabalho com a resolução de problemas, uma vez que os estudantes se sentem à vontade para apresentar e discutir seus erros, tornando a sala de aula um ambiente de troca e construção coletiva de conhecimento, sendo papel do professor estimular “[...] os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vista, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 53).

O grupo G3, composto pelos doutorandos DT, DV, DA e DP, apresentou a resolução indicada na Figura 4, que gerou bastante discussão na turma.

Figura 4: Resolução do problema do ônibus pelo grupo G3

$$\begin{aligned}(x - 2 + 10) - 6 + 2(x - 2 + 10 - 6) - 1 &= 53 \\ x - 2 + 10 - 6 + 2(x - 2 + 10 - 6) - 1 - 53 &= 0 \\ x + 2 + 2x - 4 + 20 - 12 - 1 - 53 &= 0 \\ 3x + 22 - 70 &= 0 \\ 3x &= 48 \\ x &= 16\end{aligned}$$

Fonte: Acervo de pesquisa

A resolução apresentada na Figura 4 está incorreta e foi verificada para esse problema também em outras atividades de formação docente ministradas pelas autoras deste estudo. O conceito de dobro aplicado à estrutura da equação (associado à expressão “dobrou o número de pessoas no veículo”) causou discussão entre os doutorandos, alertando que do jeito que a resolução foi apresentada, tem-se, na realidade, o triplo do valor sendo considerado (como se tivesse “triplicado o número de pessoas no veículo”).

Outro aspecto que gerou discussão, no momento da plenária, foi em relação à parada C. Os doutorandos questionaram-se se a quantidade de pessoas dobrou antes ou depois de descenderem 6 pessoas. Eles consideraram, inicialmente, que o problema não estava adequadamente escrito, pois permitia duas interpretações e, assim, duas soluções.

A partir dessa discussão, ao serem questionados pela docente da disciplina, se isso seria ruim para a aprendizagem matemática dos estudantes, os professores doutorandos

concluíram que seria melhor deixar o problema como está, pois fomentaria mais discussão e participação dos estudantes na busca de consenso, e que, para cada uma das duas interpretações possíveis, uma das soluções seria a correta.

Esse episódio releva que os doutorandos estavam de posse, inicialmente, de uma concepção de problema que precisa ser superada: a de que um “bom” problema é fechado, com uma única solução. Ao discutir sobre “os problemas que valem a pena”, Cai e Lester (2012, p. 149) reiteram que “independentemente do contexto, as tarefas que valem a pena deveriam ser intrigantes e conter um nível de desafio que convide à especulação e trabalho árduo”. Esse é um aspecto que revela a importância de se discutir com os professores o entendimento do que é um problema e de como diferentes concepções impactam nas práticas educativas.

Em consenso, a turma concluiu que a quantidade de pessoas que havia no início da viagem poderia ser 25 ou 22. Esse último resultado é obtido pela equação $(x - 2 + 10) \cdot 2 - 6 - 1 = 53$, considerando que dobra a quantidade de pessoas no veículo e depois saem as 6 pessoas. Em relação a esse tipo de problema, denominado aberto, por conter mais de uma solução, concordamos com Allevato e Vieira (2016, p. 127):

Problemas abertos, e as investigações que se sucedem, possibilitam um momento marcado por partilha de ideias, questionamentos, indagações, argumentações e refutações. A descoberta, pelos alunos, de uma variedade de estratégias e procedimentos plausíveis de serem aplicados à resolução do problema revela que os momentos de apresentação e discussão a respeito do que foi observado e produzido nas investigações mostram-se favoráveis à formação do pensamento matemático.

Depois da plenária e busca de consenso, a formalização do conteúdo matemático, também foi discutida pelos doutorandos, sendo que eles concluíram que esse problema poderia envolver a construção do conceito de dobro relacionado com operações aritméticas, ou poderia tratar da resolução de equações do primeiro grau, podendo envolver estudantes dos anos iniciais ou finais do Ensino Fundamental.

Mas as inquietações provocadas pela solução incorreta foram retomadas pelo doutorando DT na aula seguinte. Ele sugeriu que, em sala de aula de Matemática, até uma resolução errada, como a apresentada por seu grupo, poderia gerar novas discussões e ser valorizada, ampliando o contexto de aprendizagem dos estudantes. Se pode solicitar que os alunos criem problemas modificando as condições do problema gerador de modo que a solução do problema seja 16.

Essa ideia foi aceita pela turma e se discutiu que essa seria uma possibilidade para desenvolver a 10^a etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – proposição e resolução de novos problemas.

Allevato e Onuchic (2021, p. 53-54) enfatizam que a proposição de novos problemas possibilita “[...] analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático”. Além disso, se está associando a resolução com a elaboração de problemas, que é habilidade indicada pela BNCC (BRASIL, 2018), tanto para as operações aritméticas, quanto para equações, que são objetos de conhecimento envolvidos no “Problema do Ônibus”.

Como continuidade dessa discussão, os doutorandos foram envolvidos na proposição de problemas. Lhes foi solicitado que reelaborassem o problema gerador, indicando qual seria o objetivo educacional que o professor poderia ter com essa atividade em sala de aula.

A doutoranda DS modificou o trânsito das pessoas na parada C, separando-a em duas, de modo que a resposta correta ao problema fosse apenas 25, conforme mostra na Figura 5:

Figura 5: Problema proposto pela doutoranda DS

Um ônibus saiu da cidade A com algumas pessoas já embarcadas. Ao parar em B, desceram 2 pessoas e subiram 10; em seguida, na parada C, desceram 6 pessoas; e na parada D, subiu uma quantidade de pessoas que dobrou o número de pessoas no veículo. A quarta parada foi em E, onde desceu 1 pessoa e não subiu ninguém. De volta ao A, desceram todas as 53 pessoas do ônibus. Quantas pessoas havia no ônibus no início da viagem?
--

Fonte: Acervo de pesquisa

Assim, como DS, os doutorandos DY, DT e DP também propuseram problemas fechados, que contemplavam apenas a resposta 25, modificando o texto ou a forma de apresentação dos dados.

O doutorando DV, modificou o problema gerador de modo que contemplasse outros objetos de conhecimento, conforme mostra a Figura 6.

Figura 6: Problema proposto pelo doutorando FV

Um ônibus saiu de São Paulo, transportando 48 passageiros. Na primeira parada, a metade desses passageiros desembarcou. Nesse mesmo local, outras 4 pessoas embarcaram. Na segunda parada, a maioria dos passageiros desceu, ficando apenas $\frac{3}{7}$ deles. Porém, ali embarcaram mais 13 pessoas. Quantos passageiros seguiram viagem?
--

Fonte: Acervo de pesquisa

Verifica-se que esse problema envolve o objeto de conhecimento fração e não mais exige trabalhar com equações. A doutoranda DT, que por motivos técnicos não conseguiu participar da etapa de resolução do problema gerador em grupo, apresentou um problema em que ao invés de trabalhar com o conceito de dobro, envolveu a ideia de metade.

Verifica-se que apesar de a turma discutir a relevância e importância de se criar novos problemas de modo a contemplar e ampliar a discussão considerando as respostas incorretas,

o que mobilizou os doutorandos na criação de novos problemas foi fechá-lo, de modo que apenas uma solução fosse obtida.

Isso evidencia a forte influência que o trabalho com a resolução de problemas fechados teve sobre a proposição de problemas por esses doutorandos e, também, ressalta a importância de envolver professores em atividades e formações que problematizem essa prática. Cai *et al.* (2020, p. 3, tradução nossa) ressaltam a relevância de se trabalhar com as concepções dos professores para se obter resultados proeminentes no fazer pedagógico, pois “[...] os professores aumentam seu conhecimento e mudam suas crenças e, então, mudam sua instrução em sala de aula com o objetivo de melhorar o aprendizado dos alunos”.

Também foram analisadas as respostas dos doutorandos quanto ao objetivo que se teria em sala de aula com essa atividade de reelaboração do problema gerador. Verifica-se que as respostas apresentadas não explicitam objetivos educacionais que direcionassem as ações dos estudantes, com excessão de DT que manifestou o desejo de ampliar a aprendizagem associada aos conceitos e conteúdos desenvolvidos pelo problema gerador, ao modificar a informação de dobro por metade. Portanto, esse é um aspecto que carece de maior discussão, uma vez que é recomendado que a proposição de problemas seja uma atividade com implicações e objetivos explicitados claramente para a aprendizagem dos estudantes (KOICHU, 2020; XU *et al.*, 2020)

As discussões realizadas com esses professores doutorandos e as análises das produções geradas por eles, possibilitaram verificar o potencial de se inserir a proposição de problemas como 10^a etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, quando os estudantes são colocados a criar seus próprios problemas, valorizando o momento da plenária e busca de consenso, e ampliando as possibilidades de se fazer do erro um caminho para novas aprendizagens, bem como de avaliar as compreensões acerca dos objetos de conhecimento formalizados a partir do problema gerador.

Outra finalidade da proposição de problemas pelos estudantes como 10^a etapa da Metodologia, pode ser evidenciada no estudo de Andreatta e Allevato (2020), que analisam os problemas elaborados pelos estudantes em termos dos objetos de conhecimento matemático envolvidos e da motivação decorrente da identificação com os contextos produzidos. Ao envolverem nos problemas contextos relacionados às suas vivências e cotidiano, seu interesse pelos problemas e pela resolução é ampliado. Ademais, pode-se ter como objetivo da proposição de problemas, a educação integral dos estudantes em relação à criatividade e à autonomia. Os problemas se constituem nessa relação que estabelecem com situações do cotidiano, e a sua elaboração promove melhorias nos processos de escrita e de leitura de textos que envolvem matemática.

Porém, cabe ressaltar que, ao analisar os problemas criados pelos doutorandos e as justificativas quanto a inserção da proposição de problemas nas aulas, fica a inquietação de se ampliar o escopo da pesquisa de modo a se estabelecer uma metodologia de ensino através da proposição de problemas, que norteie o trabalho em sala de aula com vistas aos diferentes objetivos de aprendizagem que se almeja.

Considerações finais

Este estudo teve como objetivo analisar as contribuições da proposição de problemas pelos estudantes associada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A proposição de problemas envolvendo a criação e apresentação de problemas para um potencial resolvidor, pode constituir-se como primeira etapa da Metodologia e, a partir dos problemas criados, ou de alguns desses selecionados, possibilitar a construção e formalização de objetos de conhecimento pretendidos pelo professor.

Porém, como atividade mais proeminente para a aulas de Matemática, com vista a ampliar e avaliar as aprendizagens desenvolvidas a partir de um problema gerador, a proposição de problemas pode, também, ser incluída na última etapa da Metodologia, quando os estudantes modificam as condições do problema gerador que resolveram ou quando criam novos problemas a partir das aprendizagens desenvolvidas.

Em particular, no presente estudo implementamos a proposição de problemas após a resolução de um problema, por um grupo de professores doutorandos, analisando as possibilidades do trabalho em sala de aula. Os resultados ressaltaram a importância da proposição de problemas como forma de valorizar as resoluções apresentadas pelos estudantes, e avançar nas aprendizagens mesmo a partir dos erros cometidos nas resoluções, de modo que sejam considerados na criação de novos problemas. Além disso, verifica-se a importância de se estabelecer claramente objetivos de ensino com a atividade de proposição de problemas, de modo a orientar a atividade e atingir efetivos e desejados resultados na aprendizagem dos estudantes.

Desejamos que o presente texto inspire outros professores a avançarem sobre a prática de Proposição de Problemas associada à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e, também, outros pesquisadores a produzir pesquisas e estudos nesta temática, contribuindo para sua implementação em sala de aula de Matemática.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da Resolução de Problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, jan./jun. 2014.

- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de Problemas: teoria e prática**. 2 ed. E-book. Jundiaí: Paco, 2021, p. 40-62.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 1-14, jun. 2019.
- ALLEVATO, N. S. G.; POSSAMAI, J. P. Proposição pela reformulação de problemas na Educação Matemática: possibilidades e potencialidades. In: ASSEMAN, Daniella.; BRIÃO, Gabriela (org.). **Tendências na Educação Matemática para a Formação de Professores**, 2022 (no prelo).
- ANDREATTA, C.; ALLEVATO, N. S. G. Aprendizagem matemática através da elaboração de problemas em uma escola comunitária rural. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1-23, 2020.
- BARROS, F. A. B; JUSTULIN, A. M. Resolução de problemas do campo conceitual aditivo: uma análise das dificuldades e estratégias de alunos do 5º ano do ensino fundamental. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 15, p.230-251, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.no.p230-251.id241>
- BERTOTTI JUNIOR, V. I.; POSSAMAI, J. P. Resolução de problemas: reflexões de uma prática realizada com o uso de tecnologias digitais da informação e comunicação em aulas remotas no ensino superior. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 3, p. 485-511, 2020. DOI: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p485-511>
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018.
- CAI, J.; CHEN, T.; LI, X.; XU, R.; ZHANG, S.; HU, Y.; ZHANG, L.; SONG, N. Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. **International Journal of Educational Research**, v. 102, p. 1-12, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.02.004>.
- CAI, J.; HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: theoretical considerations, methodology, and directions for future research. **International Journal of Educational Research**, v. 102, p. 1-8, 2020.
- CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com Resolução de Problemas é importante para a aprendizagem do aluno? Tradução de Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos e Norma Suely Gomes Allevato. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, jan./jun. 2012.

- COSTA; M.; ALLEVATO, N. S. G. A escrita de (futuros) professores de matemática na resolução de um problema sobre o volume do cilindro. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 49, n. 35, p. 127-152, maio/ago. 2014.
- COSTA; F. A.; ALLEVATO, N. S. G. O ensino das funções trigonométricas através da resolução de problemas com o uso do GeoGebra. **Revista Tangram**, Mato Grosso do Sul, v. 04, n. 04, p. 92-113, out/dez. 2021.
- ENGLISH, L. Teaching and Learning Through Mathematical Problem Posing: Commentary. **International Journal of Educational Research**, v. 102, p. 1-5, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.06.014>.
- GETZELS, J. W., Problem finding: A theoretical note. **Cognitive Science**, v. 3, p. 167-172, 1979. DOI: https://psycnet.apa.org/doi/10.1207/s15516709cog0302_4.
- GIESELER, L. C.; SCHNEIDER, B.; POSSAMAI, J. P.; ALLEVATO, N. S. G. A Proposição e Resolução de Problemas na aprendizagem de Matemática: possibilidades para o Ensino Superior. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 7, p. 1-18, 2021.
- GONÇALVES; R. ALLEVATO, N. S. G. A Resolução de Problemas como proposta metodológica para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças. **REPPE: Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino**, Cornélio Procópio, v. 2, n. 2, p. 27-47, 2018.
- KOICHU, B.; KONTOROVICH, I. Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 83, n. 1, p. 71-86, 2013.
- KOICHU, B. Problem Posing in the Context of Teaching for Advanced Problem Solving. **International Journal of Educacional Research**, v. 102, p. 1-13, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001>.
- LEAL JUNIOR; L. C.; ONUCHIC, L. de la R. O Jogo da Imitação: A Resolução de Problemas na processualidade do ensino e da aprendizagem de Estatística e Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 26, p. 477-502, 2018.
- LILJEDAH; P.; CAI, J. Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. **ZDM – Mathematics Education**, v. 53, p. 723–735, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: E.P.U., 2012.
- NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000. 719 p.
- ONUCHIC; L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

- POLYA, G. **How to Solve It**: A new aspect of Mathematical Method. United States of America: Princeton Science Library, 1988. 253 p.
- POSSAMAI, J. P.; MÜLLER, J. G.; STEIN, S. S.; POFFO, C.; BERTOTTI JUNIOR, V. I. Resolução de Problemas em Matemática: evidências para caracterização como uma metodologia ativa. **Kiri-kerê: Pesquisa em Ensino**, n. 11, p. 39-58, dez. 2021 DOI: 10.47456/krkr.vii11.35703
- POSSAMAI, J. P.; ALLEVATO, N. S. G. Elaboração/Formulação/Proposição de Problemas em Matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros (MG), Brasil, v. 6, n. 12, p. 1-28, 2022.
- POSSAMAI, J. P.; SILVA, V. C. S. Comunicação Matemática na Resolução de Problemas. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – REMAT**, São Paulo, SP, v. 17, p. 01-15, 2020. DOI: doi.org/10.37001/remat25269062v17id277
- SILVER, E. A. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, v. 14, n. 1, p. 19-28, feb. 1994.
- SINGAPORE. Ministry of Education. **Mathematics Syllabuses**: secondary one to four express course. Normal (Academic) Course. Singapore: Ministry of Education, 2019.
- XU, B.; CAI, J.; LIU, Q.; HWANG, S. Teachers' Predictions of Students' Mathematical Thinking Related to Problem Posing. **International Journal of Educational Research**, v. 102, p. 1-14, 2020. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005
- YAO, Y.; HWANG, S.; CAI, J. Compreensão matemática dos professores de formação inicial exibida na formulação e resolução de problemas. **ZDM Educação Matemática**, v. 53, p. 937-949, 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-021-01277-8
- ZHANG, H.; CAI, J. Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. **ZDM Mathematics Education**, n. 53, p. 961-973, 2021. doi: https://doi.org/10.1007/s11858-021-01260-3

Biografia Resumida

Norma Suely Gomes Allevato: Possui graduação em Licenciatura e Bacharelado em Matemática e mestrado em Matemática Pura pela Universidade Estadual de Londrina, e doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Rio Claro/SP. Atualmente é membro associado da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, por sua participação no GTERP - Grupo de Trabalho e

Estudos em Resolução de Problemas; assessora formadora da Secretaria Municipal de Ensino de São Paulo; e professora permanente e coordenadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, onde é líder do GPEAEM - Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9614794595123496>

Contato: normallev@gmail.com

Janáina Poffo Possamai: possui graduação em Licenciatura e Bacharelado em Matemática, e mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Regional de Blumenau. Doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina. É professora do departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau. Atualmente é estagiária de pós-doutorado, sob supervisão da professora Dr^a Norma Allevato, na Universidade Cruzeiro do Sul, onde também é membro do Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9011361495097968>

Contato: janainap@furb.br