# Introdução ao estudo da Teoria dos Grafos: uma proposta de sequência didática para o Ensino Médio

**Luiz Fernando da Silva**

***Resumo***

Esse relato de experiência apresenta algumas atividades que compõem uma proposta de sequência didática para o estudo da Teoria dos Grafos realizadas no ambiente virtual do software Geogebra, com um grupo de estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do Vale do Rio dos Sinos no Rio Grande do Sul. A abordagem elaborada na sequência didática teve como aporte teórico a teoria do desenvolvimento proximal e a investigação adotou os procedimentos metodológicos da pesquisa qualitativa. A pesquisa apresenta a seguinte problemática: Como à introdução do estudo da Teoria dos Grafos com o uso do Geogebra pode contribuir para o ensino e aprendizagem de estudantes? E objetiva compreender essas ressonâncias na prática curricular docente. Constatou-se que a introdução da Teoria dos Grafos por ser um conteúdo capaz de mobilizar diversos conhecimentos construídos ao longo da Educação Básica, aliado ao uso do software do Geogebra como espaço de reflexão, possibilitou uma experiência pedagógica mais interativa e atrativa nas aulas de Matemática.

**Palavras-chave:** Geogebra, Sequência Didática, Teoria dos Grafos.

# Introduction to the Graph Theory study: a proposal of didactic sequence for high school

**Luiz Fernando da Silva**

***Abstract***

This experience report presents some activities that make up a proposal for a didactic sequence for the study of Graph Theory carried out in the virtual environment of the Geogebra software, with a group of students from the 2nd year of high school at a state school in Vale do Rio dos Sinos, Rio Grande do Sul. The approach developed in the didactic sequence had as theoretical support the theory of proximal development and the investigation adopted the methodological procedures of qualitative research. The research presents the following problem: How can the introduction of the study of Graph Theory with the use of Geogebra contribute to the teaching and learning of students? It aims to understand these resonances in the teaching curricular practice. It was found that the introduction of Graph Theory, as a content capable of mobilizing various knowledge built throughout Basic Education, combined with the use of Geogebra software as a space for reflection, enabled a more interactive and attractive pedagogical experience in Mathematic classes.

**Keywords:** Geogebra, Didactic Sequence, Graph Theory.

## Introdução

No cenário atual, em que reformas educacionais estão sendo promovidas com a intenção de cercear, cada vez mais, a autonomia docente a um currículo escolar que vem sendo progressivamente elaborado fora da realidade da escola. Tornou-se indispensável que o professor proponha atividades que possam conciliar essa imposição normativa e ao mesmo tempo colocar os estudantes em contato com outros saberes e conhecimentos que sejam relevantes para o contexto do ensino e aprendizagem. Assim, a sequência didática elaborada encontrou na Teoria dos Grafos o conteúdo que permite realizar essa conexão, utilizando como ferramenta de registro e resolução o software Geogebra. Nesse sentido, a pesquisa buscou responder a seguinte questão de investigação: Como a introdução de um conteúdo novo, com estudantes do Ensino Médio, aliado ao uso de tecnologia digital pode contribuir para o ensino e a aprendizagem na Educação Matemática? E a partir disso, tentou-se compreender as suas ressonâncias na prática curricular docente.

## Pressupostos teóricos

É essencial para o professor ter sensibilidade de entender o estudante como um sujeito que é social por essência, não sendo possível separá-lo ou compreendê-lo fora do âmbito social, muito menos desvincular, no caso do professor de matemática, o conhecimento matemático dessa realidade. Conforme Freire (1996, p.68), "ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo". Dessa forma, a formação se dá numa relação dialética entre o sujeito e a sociedade a seu redor, ou seja, o homem modifica o ambiente e o ambiente modifica o homem, logo, o conhecimento sempre envolve uma atividade, um fazer, um atuar do homem no social na sua interação com outros indivíduos. Vygotsky (apud REGO, 1995) enfatiza o social como fundamental para aquisição dos conhecimentos, logo, todo aprendizado é necessariamente mediado, seja na forma pela qual o professor transmite seus conhecimentos aos estudantes, ou ainda, como o aprendiz observa o trabalho do colega mais experiente. A autora ainda aponta que para explicar a importância do social na aprendizagem, Vygotsky, construiu o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal que evidencia, basicamente, a distância entre o nível do desenvolvimento real do aprendiz, que se determina pela capacidade de resoluções de problemas de forma independente, e o nível de desenvolvimento potencial, que representa aquilo que o aprendiz consegue realizar com a ajuda de um adulto ou com o auxílio de companheiros mais experientes (REGO, 1995).

Nesse tocante, o professor que deseja desenvolver uma educação emancipadora, que colabora com a formação de cidadãos, é imprescindível que tenha claro a sua intencionalidade ao realizar uma proposta de ensino e aprendizagem. Segundo Zabala (1998) uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização

*ISSN 2526-2882*

de certos objetivos educacionais e, que seja capaz de promover um processo de ensino e aprendizagem mais envolvente. De acordo com Trevisan et al (2012), uma maneira natural de aumentar o interesse dos estudantes é fazer com que a vida cotidiana se aproxime dos assuntos tratados no currículo escolar, isso pode se dar com abordagens pedagógicas diferentes, ou ainda, através de novos conteúdos introduzidos de modo a explicar situações corriqueiras. Gravina e Basso (2012) convidam a pensar que, diante das inovações tecnológicas presente no cotidiano é fundamental que a escola reverbere o uso desses recursos no espaço da sala de aula, já que a tecnologia digital disponibiliza, cada vez mais, ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos.

**Metodologia**

A investigação é realizada por meio de uma pesquisa qualitativa (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), para a qual constituem fontes de dados: observações durante a realização da sequência didática, diário de campo para sistematizar os registros das observações dos encontros e, os arquivos produzidos pelos estudantes em software computacional para compreender como a introdução de um conteúdo novo, aliado a mídias digitais pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

A sequência didática traz o conteúdo Teoria dos Grafos, pois possibilita desenvolver uma experiência nova e conexões com outros conteúdos tratados ao longo da Educação Básica. Além disso, a atividade propõe ser mediada pelo software Geogebra[1], uma vez que esse tem uma interface intuitiva e diversas ferramentas matemáticas que permitem desenvolver, em certa medida, a exteriozação do racicícino do estudante.

A atividade foi realizada em uma escola estadual da região do Vale do Rio dos Sinos, com um grupo de 10 estudantes voluntários do 2ª ano do Ensino Médio do tuno da manhã. A escolha deveu-se ao fato da dificuldade de se utilizar o laboratório móvel de computadores com uma turma inteira, pois entre notebooks furtados e em manutenção sobraram apenas cinco funcionais, além disso esse grupo de estudantes já tinham familiaridade e conheciam um pouco das ferramentas do software Geogebra.

O desenvolvimento da sequência didática deu-se, em dois encontros de aproximadamente duas horas de duração, no contraturno escolar executando metade das atividades num encontro e o restante noutro. No trabalho com os estudantes optou-se em organizá-los em duplas por afinidade para facilitar os processos de mediação e ampliar as possibilidades de interação com o recurso computacional.

Após falar sobre a pesquisa e recolher os termos de esclarecimento e autorização dos reponsáveis pelos estudantes, organizou-se as duplas de trabalho, entregou-se os notebooks e

[1] Disponível em: https://www.geogebra.org/download, acessado em 20/02/2020.

ISSN 2526-2882

se fez um breve relato a respeito da Teoria dos Grafos e suas aplicações no cotidiano. Na sequência do encontro, projetou-se no quadro a sequência didática, descritas parcialmente neste trabalho, para o grupo de estudantes, visando explorar os conceitos intuitivos sobre a temática, as diferentes formas de sua representação, com a intenção de que os estudantes se apropriassem de elementos básicos da simbologia e da terminologia relativa ao conteúdo tratado.

## Discussão da sequência didática

Na Educação Básica, especialmente, no Ensino Médio uma Educação Matemática que seja reflexiva e crítica são inquietações que muitos professores apresentam em relação ao cotidiano escolar. Afinal, como tornar a experiência de estudar um conteúdo matemático em um exercício capaz viabilizar ferramentas para o pensamento? E ainda, como o professor pode desenvolver práticas pedagógicas que possibilitem isso? Essas são algumas inquietações que motivaram a elaboração dessa sequência didática, a qual será apresentada algumas de suas atividades, intituladas a seguir como situações-problema 1, 2, 3 e 4.

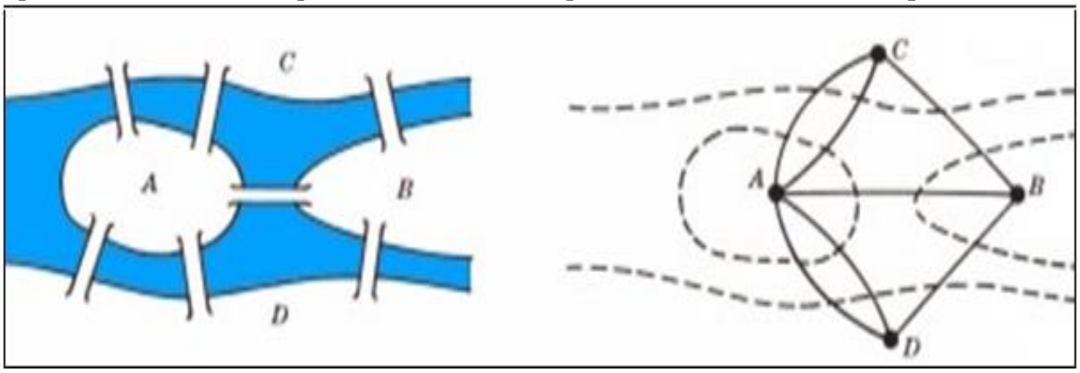
## Situação-problema 1

A Teoria dos Grafos surgiu agregando diversas áreas do conhecimento matemático, sendo considerada uma área da Matemática Aplicada. Sua menção mais antiga ocorreu no trabalho de Euler[2], no ano 1736 que relata o famoso "Problema das Sete Pontes". No final do século XVIII, na cidade de Koenigsberg (hoje chamada Kaliningrad, território pertencente à Rússia), havia sete pontes ligando várias partes da cidade. Os moradores que gostavam de passear pela cidade à tarde cogitaram se não haveria um trajeto em que cada ponte fosse atravessada exatamente uma vez. Euler resolve esse problema a partir de um esquema geométrico das pontes e lugares, onde cada ponte é uma linha e cada ponto é uma cidade. Neste desenho as linhas devem ser percorridas sem sair do traçado e sem passar duas vezes sobre a mesma linha, conforme pode ser visto na Figura 1.

[2] Leonhard Paul Euler, nascido na Basileia (Suíça), viveu de 15/04/1707 a 18/09/1783, foi um grande matemático e físico, fazendo no decorrer de sua carreira importantes descobertas. Disponível em: http://www.coladaweb.com/biografias/euller, acessado em 01/05/2019.

ISSN 2526-2882

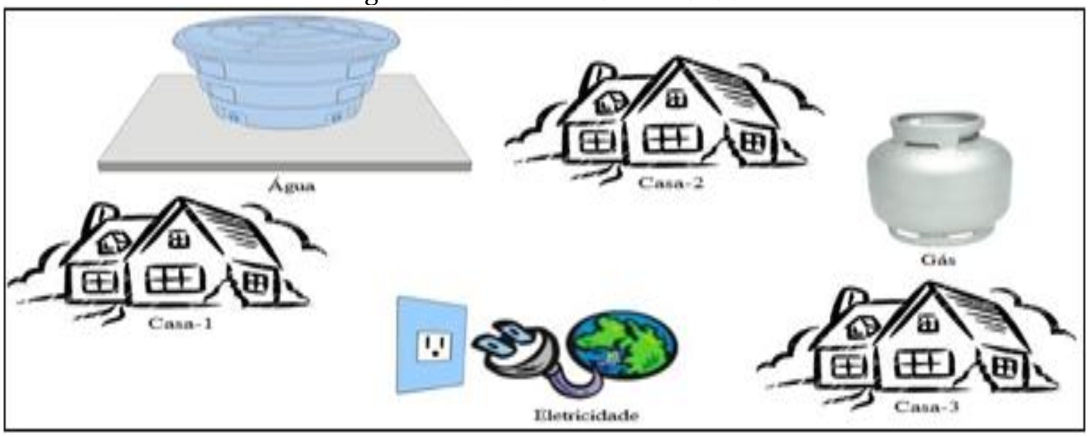
Figura 1 – Euler associou graficamente cada margem da ilha a um nó e a cada ponte um arco.




Fonte: Disponível em http://www.helderrodrigues.eu/wp-content/images/konigsberg.jpg.

Agora, imagine uma cidade com três casas e três usinas que fornecem água, gás e eletricidade. Deve-se estabelecer ligações de cada serviço com cada casa. As casas e usinas podem ser colocadas em qualquer lugar, mas fios, canos e linhas de gás jamais podem se cruzar. É possível estabelecer essas ligações, sendo que fios, canos e linhas de gás devem ficar no mesmo nível em relação à superfície? Construa no Geogebra um esquema geométrico que represente essa situação, representada na Figura 2, e verifique se existe solução para esse problema.

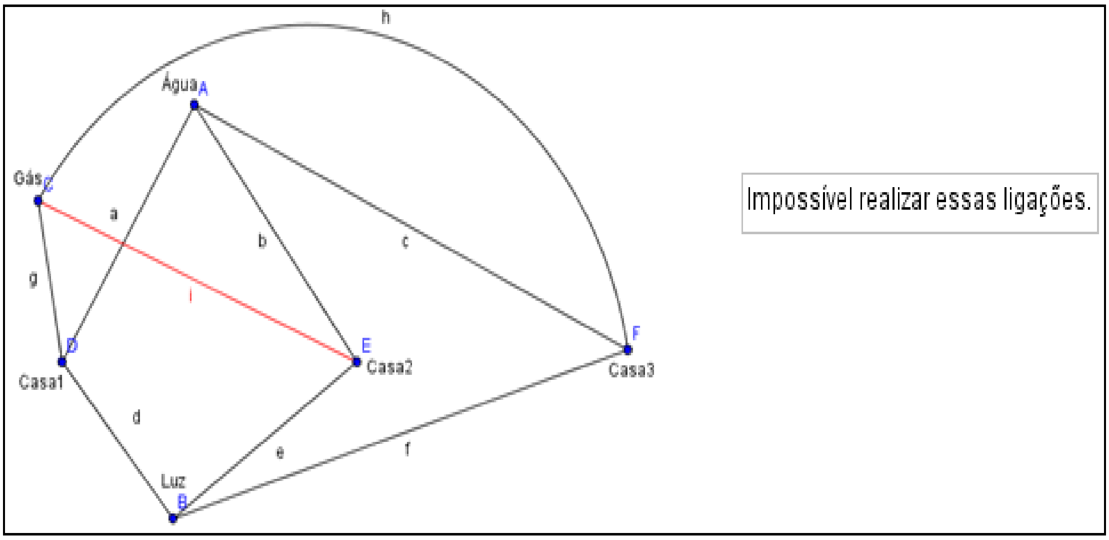
Figura 2 – Ilustrativa da atividade.




Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação a essa atividade houve bastante discussão entre as duplas, em que a maioria concluiu, de que não haveria solução possível para esse problema, conforme mostra a Figura 3, a seguir.

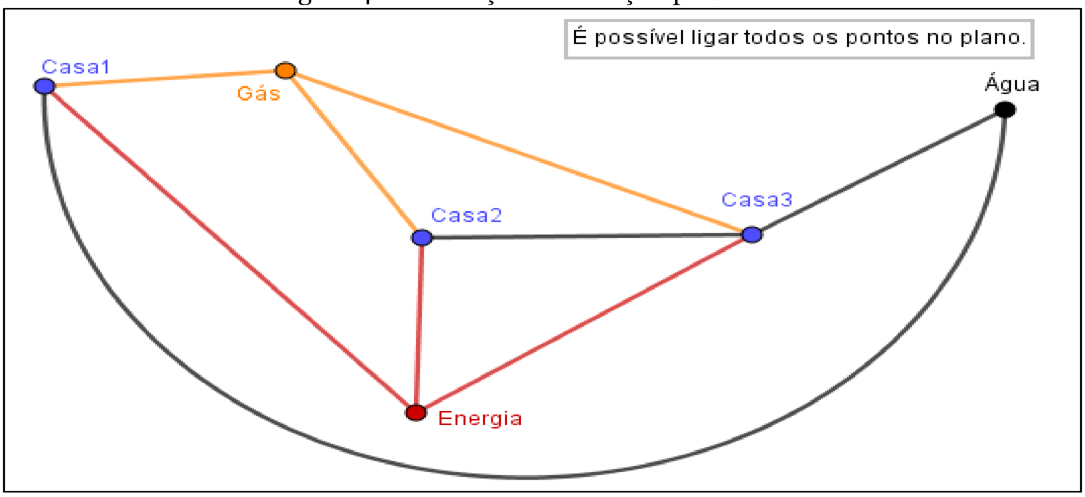
Figura 3 – Resolução da situação-problema 1.




Fonte: Arquivo Geogebra da Dupla A.

No entanto, uma das duplas discordou da solução encontrada pela maioria, trazendo a seguinte solução para o problema, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Resolução da situação-problema 1.



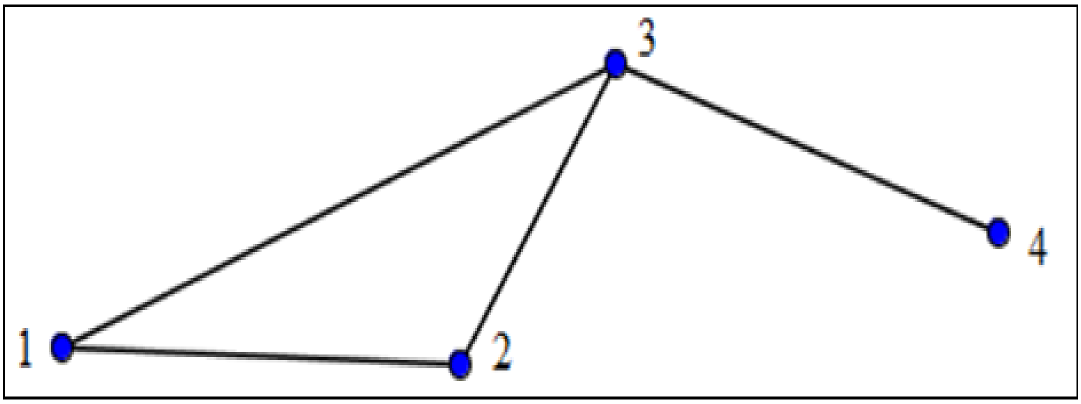

Fonte: Arquivo Geogebra da Dupla D.

A divergência apresentada gerou uma longa discussão se a solução era possível ou não – o que mostra que um problema não precisa ter solução para ser interessante –, de imediato, tentaram encontrar no professor a resposta para essa pergunta. Porém foi solicitado que, respeitando as limitações do problema, tentassem levar esse cenário para vida real. Novamente, se seguiram minutos de alvoroço entre os estudantes, que se encerrou diante de um argumento bem inusitado. Frente ao questionamento de uma das duplas de que seria muito estranha a canalização de água passar por dentro da casa, a Dupla D, contra-argumentou que isso é muito normal em edifícios, onde a canalização passa por todos os andares e, é disfarçada com um acabamento em gesso. E que, além disso, o problema não dizia que a ligação não podia ser compartilhada entre as casas.

**Situação-problema 2**

Os esquemas geométricos que apareceram na situação-problema 1, expressam uma representação visual dos dados através de um diagrama que estabelece um relacionamento entre duas grandezas, a esta representação chama-se grafo. Assim grafo é um par $G = (V, E)$ onde $V$ é um conjunto finito e $E$ é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de $V$. Os elementos de $V$ são chamados de vértices ou nós e os de $E$ são as arestas ou arcos. Dado um grafo $G = \left(\{1, 2, 3,4\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}\right)$, onde $V$ é o conjunto $\{1, 2, 3,4\}$ e $E$ é o conjunto que contém 4 subconjuntos de dois elementos de $V$, ou seja, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, tem-se graficamente, na Figura 5, a seguinte representação possível para o grafo G.

Figura 5 – Representação para o grafo G.




Fonte: Elaborado pelo autor.

Dados os grafos a seguir, construa no Geogebra uma representação possível para cada grafo:

(a) $A = \left(\{1, 2, 3,4, 5, 6\}, \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}\}\right)$;

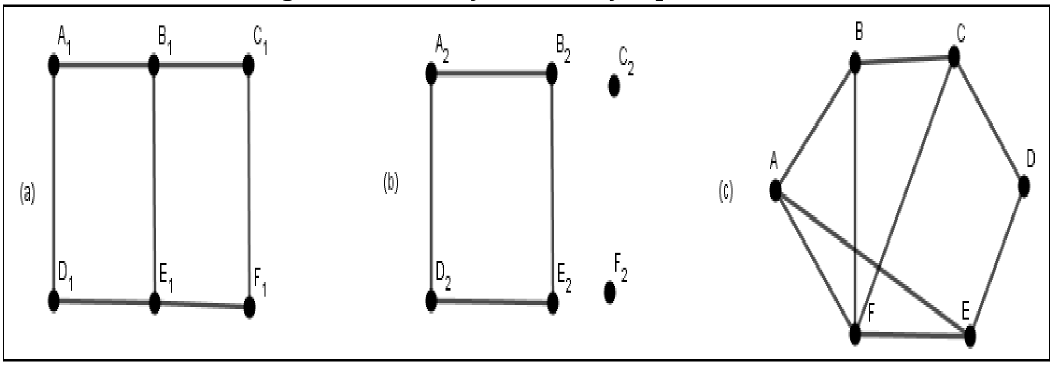
(b) $B = \left(\{1, 2, 3,4, 5, 6\}, \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}\right)$;

(c) $C = \left(\{1, 2, 3,4, 5, 6\}, \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4,5\}, \{5,6\}\}\right)$.

Nessa atividade observa-se que a dificuldade encontrada pelo grupo de estudantes para realizar transposição da representação de conjunto para a versão geométrica do grafo apareceu na utilização do Geogebra. As duplas, mesmo já conhecendo o software, não conseguiram nomear no Geogebra os vértices usando algarismos, assim renomearam os vértices e as arestas usando letras do alfabeto. Na Figura 6 a seguir tem-se a solução apresentada por uma das duplas.

ISSN 2526-2882

Figura 6 – Resolução da situação-problema 2.

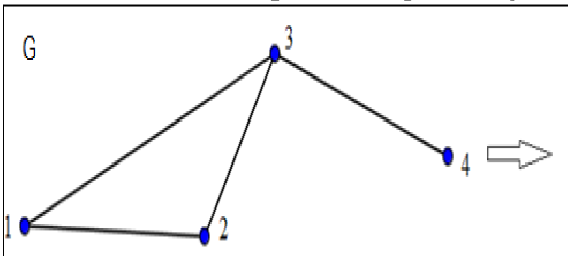



Fonte: Arquivo Geogebra da Dupla C.

## Situação-problema 3

Um grafo, além da representação de conjunto e geométrica, também pode ser representado na forma de uma matriz M bidimensional $n \times n$, onde $M(i, j) = 1$ se a aresta $(i, j)$ estiver presente em G e zero caso contrário, como representado a seguir na Figura 7.

Figura 7 – Representação matricial do grafo G.




| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dadas as representações matriciais a seguir (Figura 8), trace no Geogebra grafos que a representem. Sendo que na tabela matricial quando um dos vértices tem ligação com outro é representado por 1, não havendo ligação é representado por zero:

Figura 8 – Representação matricial do grafo G.

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

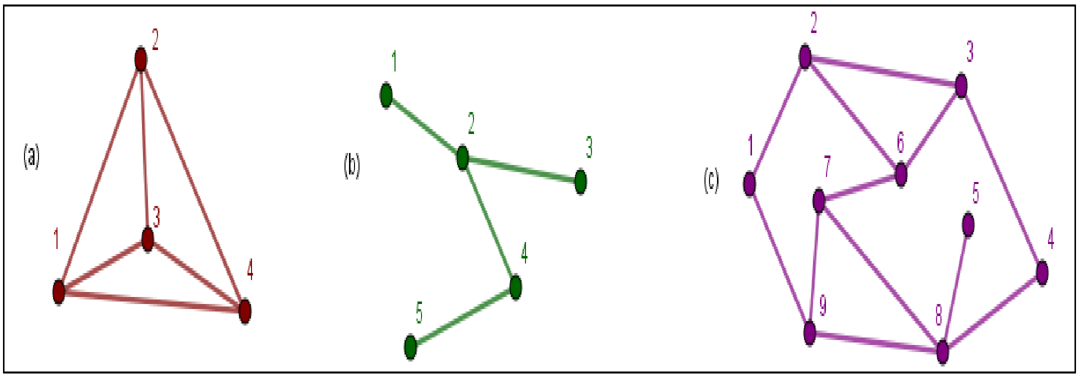
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para solucionar essa atividade as duplas manifestaram dúvida de como converteriam os algarismos em letras nessas representações matriciais. Após, discussão, debate e muitas

ISSN 2526-2882

tentativas, uma das duplas conseguiu nomear os vértices com algarismos, o que rapidamente foi compartilhado entre os demais (usando o seguinte caminho: Propriedades do Ponto, Aba Básico, Item Exibir Rótulo, Opção Legenda). Na sequência, apresenta-se na Figura 9 a solução encontrada por uma das duplas.

Figura 9 – Resolução da situação-problema 3.

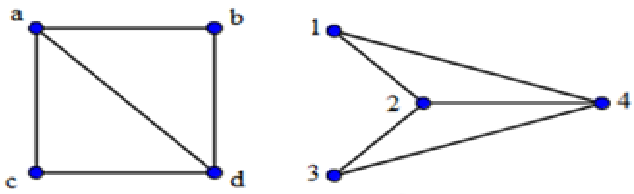



Fonte: Arquivo Geogebra da Dupla B.

**Situação-problema 4**

Muitas vezes, os grafos podem apresentar uma representação de conjunto semelhante, mas diferentes representações geométricas. Nessas situações diz-se que há um isomorfismo de grafos. Todavia, fazer a verificação desse isomorfismo pode, por vezes, ser bastante trabalhosa, assim a representação matricial é um recurso valioso que pode simplificar essa análise. Observe na Figura 10 como grafos com diferentes representações geométricas na realidade são o mesmo grafo quando representados na forma matricial.

Figura 10 – Representação matricial para verificar o isomorfismo de grafos.




$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

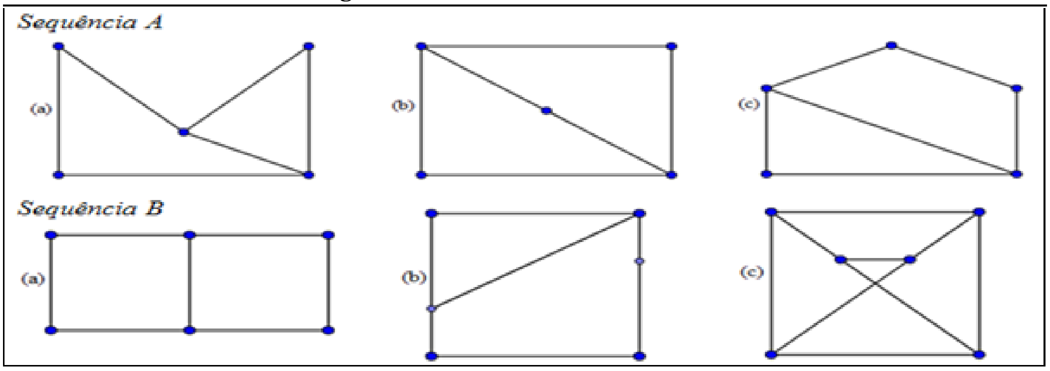
| G | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | 1 |
| b | 1 | 0 | 0 | 1 |
| c | 1 | 0 | 0 | 1 |
| d | 1 | 1 | 1 | 0 |

| G' | 2 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas sequências de grafos A e B que se seguem na Figura 11, analise as sequências de grafos; encontre quais grafos são isomorfos; e apresente uma representação matricial no Geogebra para eles:

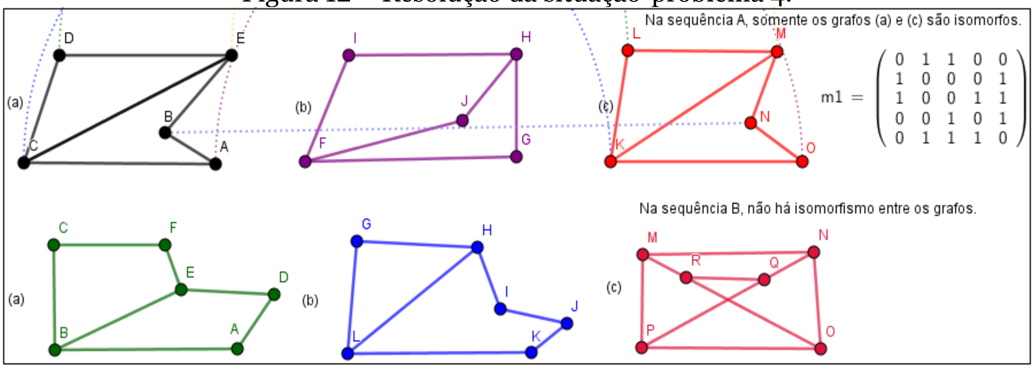
Figura 11 – Ilustrativa da atividade.




Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa atividade, a intenção era que os estudantes usassem as matrizes para avaliar se havia isomorfismo entre os grafos. No entanto, as duplas utilizaram-se como estratégia reproduzir os grafos no Geogebra e manuseá-las até encontrar representações geométricas aproximadas, para então analisar o isomorfismo entre os grafos e fazer a representação matricial. As duplas levaram bastante tempo nessa resolução, mas apenas uma dupla concluiu todos os itens solicitados, como pode ser visto na Figura 12 a seguir.

Figura 12 – Resolução da situação-problema 4.




Fonte: Arquivo Geogebra das Duplas E.

Ao analisar os debates e respostas apresentadas durante a execução das atividades percebeu-se engajamento e desempenho satisfatório no desenvolvimento das mesmas. Nota-se com essa prática curricular que para influir no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes não é condição suficiente o professor ter o domínio do conteúdo, concisão e clareza nas suas explanações. É necessário, sobretudo, que o professor se aproxime desses para que possa interpretar as dificuldades apresentadas por eles, para que possa fazer a intervenção mais adequada possível.

## Considerações

Na aplicação da sequência didática, pretendeu-se não interferir na experiência dos estudantes com o conteúdo proposto – Teoria dos Grafos – e o recurso tecnológico utilizado –

Geogebra. Tendo sido introduzido de modo gradual conceito, terminologia, notação e aplicação dos grafos, no decorrer das atividades. Para que a necessidade de intervenção do professor fosse a menor possível e, assim contribuísse para um clima de colaboração entre os estudantes na resolução das atividades. Nesse sentido, parece que a utilização do Geogebra foi um recurso importante para isso, pois sua interface permitiu que os estudantes mostrassem e, consequentemente, compartilhassem como estavam pensando. Ajudando assim na comunicação de suas hipóteses, suas análises e interpretações. Por outro lado, as atividades da sequência didática possibilitaram que os estudantes trouxessem à tona outros saberes que traziam consigo. Fato esse que viabilizou que os estudantes aprendessem uns com os outros, e que evidenciou que a tecnologia pode ser um meio de aproximação entre os estudantes e o conteúdo que está sendo trabalhado.

Portanto, percebe-se que o uso das tecnologias digitais precisa superar a ideia, muitas vezes vinculada, de que são auxiliares externos para os processos de ensino e aprendizagem. E, serem compreendidas como possibilidade de constituição de espaço de ensino e aprendizagem. Para isso, o planejamento das aulas não deve mais adaptar o recurso tecnológico ao conteúdo escolar, mas sim integrar essas duas metades. E quiçá a partir daí se propor uma nova forma de ensinar e aprender. Para tanto, é imprescindível que políticas públicas levem as tecnologias digitais para as escolas, especialmente, para escola pública, para que os professores possam integrá-las a rotina das suas aulas.

Por fim, no cotidiano escolar por vezes o professor condiciona, devido aos mais diversos motivos, seu planejamento ao desencadeamento proposto pelas políticas de centralização curricular das redes de ensino ou ainda pelas editoras dos livros didáticos. Tal situação cerceia a possibilidade de inovações no espaço de sala de aula. O que é condição indispensável para se encontrar novos caminhos para o ensino e aprendizagem na Educação Matemática.

**Referências**

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice [et al]. **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação do professor de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

REGO, T. C. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

*ISSN 2526-2882*

TREVISAN, V. [et al]. Novas abordagens e novos conteúdos no ensino da Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice [et al]. **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação do professor de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

ZABALA, A. **A prática educativa**. Tradução: Ernani F. F. R. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

***Biografia Resumida***

---

**Luiz Fernando da Silva:** Professor de Matemática da Educação Básica de escolas da rede pública de ensino do Vale do Rio dos Sinos, Rio Grande do Sul. Licenciado em Matemática (UNISINOS), Especialista em Educação Matemática (FURG), Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS) e Doutorando em Educação (UFSM).

**Lattes:** http://lattes.cnpq.br/2122902481934049

**Contato:** lfavilis@hotmail.com