

## **O ensino da Geometria Esférica: possibilidades para inclusão de deficientes visuais nas aulas de Matemática**

**Priscila Coelho Lima**



**Ana Paula Perovano**



**Douglas Ribeiro Guimarães**



---

### **Resumo**

---

A abordagem de geometrias não-euclidianas é pouco comum no ensino de matemática das escolas e universidades, apesar de constarem em documentos oficiais brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio e Base Nacional Comum Curricular. Consideramos que abordar conteúdos da Geometria Esférica na Educação Básica possibilita que o aluno possa relacionar tal conhecimento com seu cotidiano, compreender os diferentes modelos geométricos que os cerca, ampliando o repertório de seu pensamento geométrico. Neste trabalho, buscamos refletir e propor atividades de ensino de Geometria Esférica nas premissas do Desenho Universal para a Aprendizagem, acessível a todos estudantes. De modo especial, nos dedicamos a pensar atividades em que estudantes deficientes visuais pudessem participar com os demais alunos. Durante as discussões nas aulas de Fundamentos da Geometria em um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática planejamos e executamos uma atividade que foi apresentada nesta disciplina e que aqui será relatado seu desenvolvimento. Tais atividades podem servir para novas discussões sobre o ensino de uma Geometria Não-Euclidiana, além de possibilitar novas compreensões para os estudantes, levando em consideração o seu cotidiano.

**Palavras-chave:** Geometria Não-Euclidiana, Geometria Esférica, Desenho Universal, Educação Inclusiva.

## **Sphere Geometry teaching: inclusion possibilities of visually disabled people in Mathematics classes**

**Priscila Coelho Lima**

**Ana Paula Perovano**

**Douglas Ribeiro Guimarães**

### ***Abstract***

---

The approach of non-Euclidean geometries is uncommon in mathematics teaching at schools and universities, although they appear in official Brazilian documents, such as the National Curriculum Parameters for Mathematics, the Curricular Guidelines for Secondary Education and the Common National Curricular Base. We consider that addressing contents of Spherical Geometry in Basic Education allows the student to relate such knowledge to his daily life, understand the different geometric models that surround them, expanding the repertoire of his geometric thinking. In this work, we seek to reflect and propose activities for Spherical Geometry teaching on the premises of Universal Design for Learning, accessible to all students. In a special way, we dedicate ourselves to thinking about activities in which visually impaired students could participate with the other students. During the discussions in the Geometry classes Fundamentals in a Postgraduated Course in Mathematical Education, we plan and execute an activity that was presented in this subject and that will be reported here on its development. Such activities can serve for new discussions about the teaching of Non-Euclidean Geometry, in addition to enabling new comprehensions for students, taking into account their daily lives.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometry, Spherical Geometry, Universal Design, Inclusive education.

## **Introdução**

Neste ensaio, buscamos refletir e propor atividades de ensino de Geometria Esférica nas premissas do Desenho Universal para a Aprendizagem (CAST, 2011), acessível a todos estudantes. A motivação para este texto nasceu durante as discussões nas aulas de Fundamentos da Geometria no curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”, Campus de Rio Claro. Durante a referida disciplina, que explicitou as bases das diferentes Geometrias, surgiu o interesse em pensar o ensino de Geometria Esférica para um estudante cego, pois alunos com deficiência integram o ambiente escolar. Dessa forma, planejamos e executamos uma atividade que foi apresentada nesta disciplina e que aqui será relatado seu desenvolvimento. Abordar conteúdos da Geometria Esférica na Educação Básica possibilita que o aluno possa relacionar tal conhecimento com seu cotidiano, compreender os diferentes modelos geométricos que os cerca, ampliando o repertório de seu pensamento geométrico.

O Desenho Universal possui como ideia central de que produtos, serviços e ambientes possam ser usados pelo maior número possível de pessoas independentemente da idade, tamanho ou deficiência, ou seja, possam atender a diversidade humana. No contexto escolar, o Desenho Universal para a Aprendizagem envolve a construção de princípios que orientam a elaboração de objetos, ferramentas e processos pedagógicos que visam acessibilidade para a aprendizagem dos alunos de forma inclusiva (CAST, 2011).

## **A Geometria Elíptica na perspectiva das Políticas Públicas Brasileiras**

Nesta seção apresentaremos o entendimento sobre o ensino da Geometria Esférica segundo os documentos oficiais. Entretanto, consideramos necessário exibir uma breve história do surgimento desta Geometria.

Por volta de 300 a.C., em Alexandria, viveu o grande matemático grego Euclides, que ficou muito conhecido pela atribuição à obra *Os Elementos*, que contém treze volumes sobre Geometria, abordando entre outros assuntos, a Geometria Plana e a Espacial. Assim, se estabeleceu a Geometria Euclidiana, que é ensinada nas escolas e universidades até os dias de hoje.

*Os Elementos* é uma obra reconhecida mundialmente, sendo a segunda mais traduzida em todo o mundo, perdendo apenas para a Bíblia (BORGES FILHO, 2005). No primeiro volume (Livro I) encontramos cinco postulados, e com algumas definições e noções comuns, como pontos e retas, temos uma variedade de teoremas e construções possíveis na Geometria Plana.

O quinto postulado, conhecido com postulado das paralelas, ou como o quinto postulado de Euclides, tem a seguinte afirmação:

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Aqui é importante ressaltar que esse enunciado original de Euclides é equivalente ao enunciado mais moderno visto na maioria dos livros de ensino médio, qual seja: Dados uma reta e um ponto fora dela, podemos traçar uma e só uma reta paralela à reta dada passando pelo ponto dado (BALESTRI, 2016; IEZZI, et al, 2016).

Este enunciado do quinto postulado é diferente dos quatro anteriores, pois segundo Santos (2016, p. 26) “ele não pode ser validado empiricamente e é o único condicional. A redação segue a estrutura utilizada em um teorema, não faltando o “se” e o “então”, a “hipótese” e a “tese” [...]”, além disso, ele só é utilizado no Livro I após os primeiros 28 resultados, o que criou expectativas para uma possível demonstração. Santos (2016) lembra que, por muito tempo, acreditou-se que o postulado das paralelas poderia ser um teorema decorrente dos quatro primeiros postulados de Euclides.

Devito, Freitas e Pereira (2014, p. 10) assinalam que,

Nesta busca da prova do quinto postulado foram geradas muitas afirmações equivalentes a ele, afirmações estas chamadas de substitutos. As 23 definições de Euclides, as cinco noções comuns, os quatro primeiros postulados e mais a proposição substituta, nos dá uma teoria axiomática que coincide com a geometria de Euclides.

Após muitos desses “substitutos” serem encontrados, ou seja, o mesmo postulado com uma afirmação equivalente, as suas demonstrações continham erros, que foram descobertos anos mais tarde, contrariando o que achavam de uma possível prova do postulado das paralelas.

Porém, uma abertura possível a partir da falha nessas demonstrações foi da possibilidade de existirem novas geometrias, ou, como veremos neste trabalho, as geometrias não-euclidianas, especificamente a Geometria Elíptica. Guimarães e Perovano (2020, p. 24) alegam que “além de negar o 5º Postulado é necessário modificar outros dois postulados de Euclides, pois senão essa Geometria seria inconsistente, assim, são inválidos o 1º e 4º postulados.”

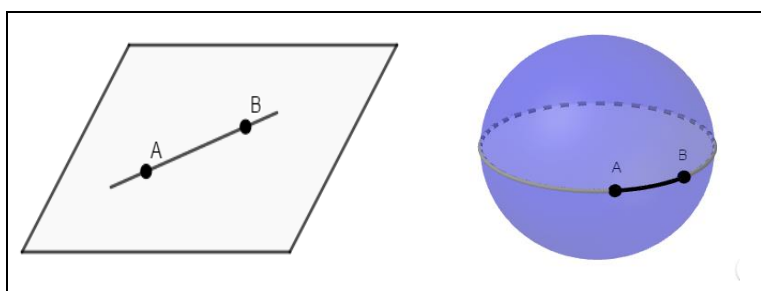
A Geometria Elíptica tem como grande principiante o matemático alemão Bernhard Riemann, que ao desconsiderar o postulado das paralelas, afirma que *quaisquer duas retas em um plano têm um ponto em comum*, ou seja, temos a existência de uma nova geometria, que mantém toda a estrutura necessária para ser verdadeira.

A Geometria Riemanniana (ou Elíptica), segundo Devito, Freitas e Pereira (2014),

inclui outras geometrias: projetiva, estereográfica e hiperesférica. Nesse texto, abordaremos um tipo específico de Geometria Elíptica, a Geometria Esférica.

Esta Geometria toma como elementos primitivos: os planos (superfície esférica); as retas (círculos máximos ou uma geodésica) e os pontos. Enquanto na Geometria Plana a menor distância entre dois pontos A e B é dada pelo segmento AB, analogamente, na Geometria Esférica a menor distância entre dois pontos é dada percorrendo-se o menor segmento do círculo máximo que passa pelos dois pontos A e B, conforme pode ser visualizado na Figura 1 a seguir:

Figura 1: Representação da distância entre dois pontos nas Geometrias Plana e Esférica, respectivamente



Fonte: Elaborado pelos autores baseados em Tenório (2009, p. 66)

Outros resultados dessa Geometria:

O postulado das paralelas de Euclides não é válido, já que por um ponto P da superfície fora de uma reta (círculo máximo) não pode se traçar nenhuma paralela à reta dada;

A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos;

Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, se interceptam;

Uma reta não é dividida em duas por um ponto;

A área de um triângulo é proporcional ao excesso da soma dos seus ângulos;

Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.

E como abordar essa Geometria em sala de aula? Não estamos querendo descartar o ensino da Geometria Euclidiana, mas propiciar situações em que os alunos possam confrontar e compreender as diferenças existentes entre as geometrias. Para isso, fomos buscar nos documentos oficiais: os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), as Orientações Curriculares do Ensino Médio (2006) e a Base Nacional Comum Curricular (2017), as recomendações para o ensino da Geometria Esférica, pois tais documentos

apresentam diferentes propostas e direcionamentos para elaboração do currículo escolar, entre eles o da Matemática. Tais documentos são também referências para Secretarias de Educação municipais e estaduais organizarem suas propostas curriculares e nortearem a elaboração de materiais didáticos por parte dos autores.

Conforme já anunciamos anteriormente, a Geometria apresentada aos alunos da Educação Básica é a Geometria Euclidiana, proposta por Euclides, de forma axiomática, e “muitas vezes, os conteúdos geométricos são tratados isoladamente, apresentados e exauridos num único momento.” (BRUM; SCHUHMACHER; SILVA, 2015, p. 3).

O que também se observa em termos escolares é que, com frequência, o ensino da Geometria é iniciado ressaltando o constante, o permanente e o fixo; por exemplo, a posição da figura, o total de lados, a igualdade de lados e de ângulos. Estas propriedades parecem aceitáveis às crianças quando a figura está na posição frontal, que é um caso particular da realidade. Tal opção de ensino se assemelha a mostrar uma foto de um objeto em movimento, com a pretensão de que ela revele o tipo de movimento do objeto. Este modo de ensinar dificulta o reconhecimento do quadrado como caso particular de retângulo e do losango (LORENZATO, 2015, p. 12).

Essa forma de ensino, comumente adotada, como os citados pelos autores, limita a construção do seu conhecimento do aluno a casos específicos e dificulta o acesso a uma interação mais dinâmica com o conhecimento. Para Coutinho (2001), a abordagem de outras geometrias em sala de aula possibilita ir além das ideias apresentadas por Euclides até por que “existem objetos que se encontram na natureza que exigem conhecimentos que transcendem a Geometria Euclidiana” (BRUM; SCHUHMACHER; SILVA, 2015, p. 5). Dessa forma, entendemos ser necessário divulgar algumas atividades da Geometria Esférica, uma vez que tal Geometria “auxilia na compreensão dos conceitos euclidianos, pois o aluno pode ser levado a fazer comparações ao expandir as definições euclidianas para a Geometria da Esfera, bem como a compreender como um sistema de axiomas pode ser modelado” (LÉNART, 1996, p. 18, tradução nossa).

Consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN (1998) que

[...] fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. [...] Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1998, p. 25).

Percebemos que o referido documento aponta para outros modelos, além do euclidiano, para modelar a realidade do espaço físico, como é o caso das navegações e rotas

de aviões em que a Geometria Euclidiana não é aplicável de modo mais preciso.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (2006) são recomendadas situações que desenvolvam “capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.” (BRASIL, 2006, p. 75). Novamente, como já discutido, as situações da realidade compõem uma importante forma de resolver os problemas originados destas situações, como um meio de auxiliar o aprendizado do aluno.

A orientação no espaço depende do “estudo de diferentes sistemas de coordenadas para o plano e o espaço (cartesianas, polares, esféricas), e de construção de algumas curvas e superfícies, provoca um pensamento matemático generalizador ao ir além do até então restrito universo de retas, círculos e curvas” (BRASIL, 2006, p. 93).

Atualmente a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) recomenda que ao abordar o conceito de espaço, sejam trabalhadas outras relações, além das euclidianas, tendo em vista que estas são componentes para o processo de alfabetização cartográfica.

Ao tratar do conceito de espaço, estimula-se o desenvolvimento das relações espaciais topológicas, projetivas e euclidianas, além do raciocínio geográfico, importantes para o processo de alfabetização cartográfica e a aprendizagem com as várias linguagens (formas de representação e pensamento espacial) (BRASIL, 2017, p. 364).

Em contexto estadual, destacamos o Estado do Paraná por contemplar em sua Proposta Curricular recomendações a respeito do trabalho com Geometrias Não-Euclidianas. O argumento para apresentar tais geometrias é que “Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não-euclidianas. Um exemplo são os estudos que resultaram na Teoria da Relatividade” (PARANÁ, 2008, p. 56). No que tange especificamente ao ensino da Geometria Esférica, o referido documento orienta

[...] fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos [sic], equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 57).

Pelo exposto, entendemos que cabe ao professor conhecer e propor atividades problematizadoras com a pluralidade de modelos geométricos no sentido de encaminhar o aluno às descobertas e à comparação das geometrias pois possibilitará ampliar o repertório



de conhecimento geométrico por parte do aluno. Cabe dizer também que tais atividades são indispensáveis na relação presente no dia a dia dos estudantes, e que, assim eles podem assimilar o porquê das diferentes geometrias para representar o espaço físico, por exemplo.

Apenas na BNCC (BRASIL, 2017) encontramos a recomendação de um planejamento que contemple o reconhecimento das diferenças das necessidades dos alunos, enfatizando a equidade em que é exigido um compromisso para reverter a situação histórica que excluiu os povos indígenas, quilombolas, afrodescendentes, pessoas que não puderam estudar ou completar sua escolaridade na idade própria, [...] “Igualmente, requer o compromisso com os alunos com deficiência, reconhecendo a necessidade de práticas pedagógicas inclusivas e de diferenciação curricular, conforme estabelecido na Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Lei nº 13.146/2015).” Consideramos que as práticas pedagógicas inclusivas não foram contempladas nos documentos anteriores a 2015 devido ao ano de publicação citada Lei.

Como o nosso objetivo é refletir e propor atividades de ensino de Geometria Esférica nas premissas do Desenho Universal para a Aprendizagem, acessível a todos estudantes, pensando em atividades acessíveis inclusive para deficientes visuais, apresentaremos, a seguir, um breve histórico do processo de escolarização deste público.

### **A Educação de Deficientes Visuais: um breve histórico e contribuições da Educação Inclusiva**

As primeiras ações de educação pensadas para pessoas cegas, seja no panorama internacional ou nacional, foram as escolas especiais, que pensavam o ensino especificamente para pessoas de uma determinada deficiência. O Brasil, inspirado pela implementação do Imperial Instituto dos Jovens Cegos de Paris, em 1784, criou, no Rio de Janeiro, o Imperial Instituto dos Meninos Cegos, hoje conhecido como Instituto Benjamin Constant, em 1854, voltado para a educação de deficientes visuais. Diversos institutos similares surgem em outros estados brasileiros, nos mesmos moldes do instituto carioca.

O surgimento dos primeiros Serviços de Educação Especial nas Secretarias Estaduais de Educação e das campanhas nacionais de educação de deficientes, ligadas ao Ministério da Educação e Cultura marcou o final da década de 1950. Na década seguinte, a Campanha Nacional de Educação e Reabilitação de Deficientes da Visão, deixa de ser vinculada ao Instituto Benjamin Constant e passa a integrar diretamente o Ministério da Educação, com o nome de Campanha Nacional de Educação de Cegos (CNEC). Tal acontecimento instaura uma crise entre o Instituto Benjamin Constant, que defendia a continuidade da educação segregada de alunos cegos e a Campanha, identificada com a defesa da integração dos alunos deficientes visuais na rede comum de ensino (ROSA; DUTRA, 2006,



p. 11). Desde então, a política educacional voltada a deficientes visuais fazia indicação clara da sua opção pela escola comum do ensino regular em detrimento às escolas especiais segregadas. Tal opção, é referendada por Vigotski ao defender que

[...] é necessário acabar com a educação segregada, inválida para os cegos e desfazer os limites entre a escola especial e a normal: a educação da criança cega deve ser organizada como a educação da criança apta para o desenvolvimento normal; a educação deve formar realmente do cego uma pessoa normal, de pleno valor no aspecto social e eliminar a palavra e o conceito de "deficiente" em sua aplicação ao cego (VIGOTSKI, 1997, p. 87).

Hoje, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação em seu artigo 4º institui que o atendimento educacional especializado gratuito aos educandos com deficiência, transversal a todos os níveis, etapas e modalidades, deve ser oferecido, preferencialmente, na rede regular de ensino (BRASIL, 1996). As pessoas com deficiência, dentre elas deficientes visuais, estão, pois, no ambiente escolar como sujeitos de direito, inclusive no meio universitário. Por este motivo, nos dedicamos, no presente texto, a refletir e propor uma atividade de ensino de Geometria Esférica nas premissas do Desenho Universal, que seja acessível a todos estudantes. De modo especial, pensamos em uma estratégia em que estudantes deficientes visuais possam participar, manipular e compreender os conceitos, juntamente com estudantes videntes.

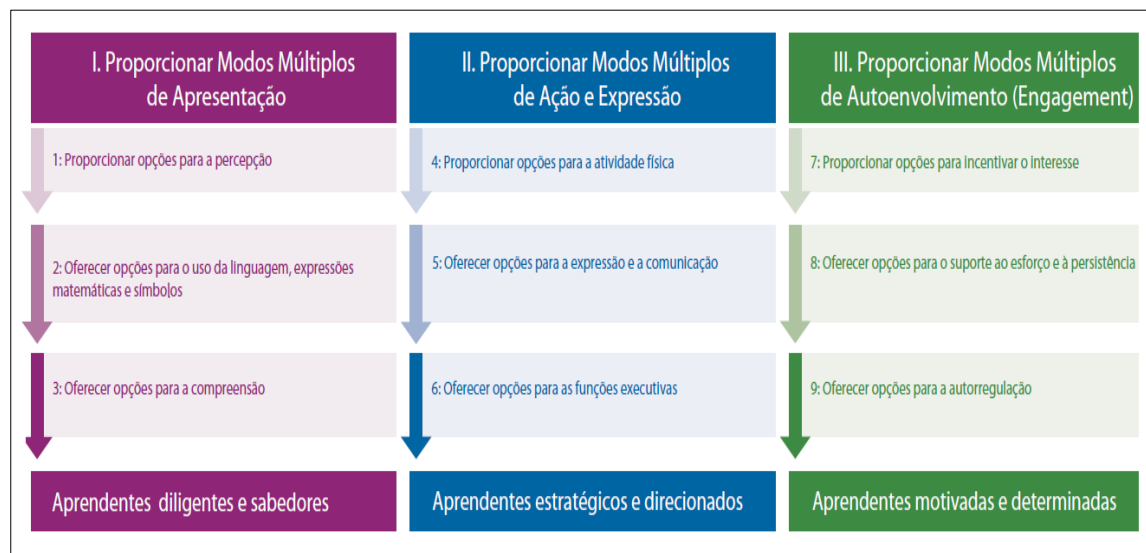
O Desenho Universal é um conceito inicialmente concebido por profissionais de arquitetura em meados da década de 1980, na Universidade da Carolina do Norte, nos Estados Unidos. Foram motivados pela busca na “mudança de paradigma no desenvolvimento de projetos urbanos, de arquitetura e design, inclusive de produtos, que consiste na criação de ambientes e produtos que possam ser usados por todas as pessoas, na sua máxima extensão possível” (SÃO PAULO, 2010, p. 12). A ideia central é, exatamente, evitar a necessidade de planejamento e execução de ambientes e produtos específicos para pessoas com deficiências. Sua premissa é considerar que “o ser humano “normal” é necessariamente o ser humano “diverso”, e esta diversidade é o que nos enriquece enquanto espécie” (CARLETTO; CAMBIAGHI, 2008, p. 11).

No contexto educacional, as discussões sobre o Desenho Universal levaram ao desenvolvimento de um conceito secundário: O Desenho Universal para Aprendizagem (DUA). A educação inclusiva, ao reconhecer que todos os indivíduos são diferentes entre si e, deste modo, sujeitos únicos, com habilidades, necessidades e especificidades distintas, tem no DUA um caminho democrático para a inclusão escolar. O DUA tem como princípios proporcionar diversos meios de representação, de ação e expressão e de envolvimento. Nesse sentido, a prática educacional deve oferecer flexibilidade nas formas pelas quais a informação

é apresentada, nas formas como os alunos respondem ou demonstram conhecimentos e habilidades e nas formas em que os alunos estão envolvidos. Para que aconteça uma educação inclusiva segundo as premissas do Desenho Universal, a escola deve buscar meios de reduzir as barreiras na instrução, disponibilizar acomodações apropriadas, propor apoios e desafios adequados e estipular as expectativas de aprendizagem de nível alto para todos os alunos, incluindo alunos com deficiência e estudantes que apresentem dificuldade de aprendizagem em determinado assunto (CAST, 2011, p. 6).

Assim, por possibilitar conceber uma escola pensada para todos, sem adaptações específicas para um indivíduo, o DUA colabora na execução de projetos escolares inclusivos, ao nos convidar a ampliar o olhar para considerar a diversidade da sala de aula, levando em conta as especificidades individuais no planejamento de ações para todo o grupo. A Educação Inclusiva tem por objetivo que todos os alunos se desenvolvam e aprendam, tendo suas necessidades, especificidades e potencialidades respeitadas. A Figura 1 ilustra os Princípios Orientadores do DUA.

Figura 2: Princípios Orientadores do DUA.



Fonte: Adaptado de Cast (2011).

Tais princípios devem ser considerados quando planejamos atividades inclusivas, sendo assim, consideramos necessário fazer sua adoção nas propostas de atividades para o ensino da Geometria Esférica. Porém, durante as atividades e discussões em nossa disciplina, uma inquietação ocupou nossos pensamentos: como ensinar Geometria para Deficientes Visuais?

## **O Ensino de Geometria para Deficientes Visuais**

A busca por compreender como um deficiente visual aprende Geometria deve ser feita pela pergunta: como um aluno aprende Geometria? Todas as pessoas são diferentes e cada um aprende a seu modo. Ser uma pessoa cega ou com baixa visão não afeta suas capacidades cognitivas. De fato, o que muda é a maneira pela qual o sujeito irá acessar o conhecimento.

O que diferencia um estudante deficiente visual é a ausência ou o comprometimento em um dos cinco sentidos, especificamente a visão. Portanto, existem outros quatro que os aproximam dos demais estudantes. Solange Fernandes (2004) defende que, se o estudante sem acuidade visual receber os estímulos adequados para empregar outros sentidos – tato, fala e audição – poderá aprender matemática como qualquer estudante vidente, desde que sejam respeitadas as singularidades de seu desenvolvimento cognitivo. Deste modo, a autora ressalta que “as principais dificuldades destes alunos não são necessariamente cognitivas, mas sim de ordem material e técnica, e que frequentemente, condicionam o ritmo de trabalho de um aluno cego na hora de aprender Matemática” (FERNANDES, 2004, p. 218).

Segadas et al. (2011, p. 2) ressaltam que a preocupação com a melhor forma de aprendizagem deve considerar que, “para a formação apropriada de uma imagem mental dos objetos, a utilização de recursos didáticos vem a ser primordial”. Ao considerarmos as pessoas deficientes visuais, tal preocupação é fundamental, uma vez que, provavelmente, para este público, os recursos didáticos utilizados assumem papel crucial para a aprendizagem. Os autores apresentam alguns materiais indispensáveis no processo de ensino e de aprendizagem de alunos cegos: reglete, punção, tela e textos transcritos no Sistema Braille; e para alunos com baixa visão: cadernos com margens e linhas fortemente marcadas e espaçadas, lápis com grafite de tonalidade forte, materiais com cores fortes e contrastantes (SEGADAS et al., 2011, p. 2). Apontam também que outros materiais utilizados para o ensino de Geometria para videntes, como Tangram e o geoplano, são usados também para cegos. Porém, dependendo do conteúdo a ser trabalhado, não existirão materiais previamente disponíveis, sendo necessária a elaboração de materiais adequados àquele conteúdo específico.

O ensino de Matemática, em especial o de Geometria, para alunos deficientes visuais, implica na diversificação dos recursos utilizados, buscando por alternativas em que a visão não seja a principal via de acesso à informação. Na atividade que planejamos para o trabalho com Geometria Esférica, exploramos o tato, experimentando relevos e texturas. Barbosa (2003, p. 19) destaca que, valendo-se de bom senso e criatividade, o professor é capaz de selecionar, adaptar e confeccionar materiais que possibilitem a aprendizagem de todos os alunos. A escolha dos materiais deve ser feita de modo a garantir uma experiência ao aluno.

## **Propostas de Atividades para o Ensino de Geometria Elíptica**

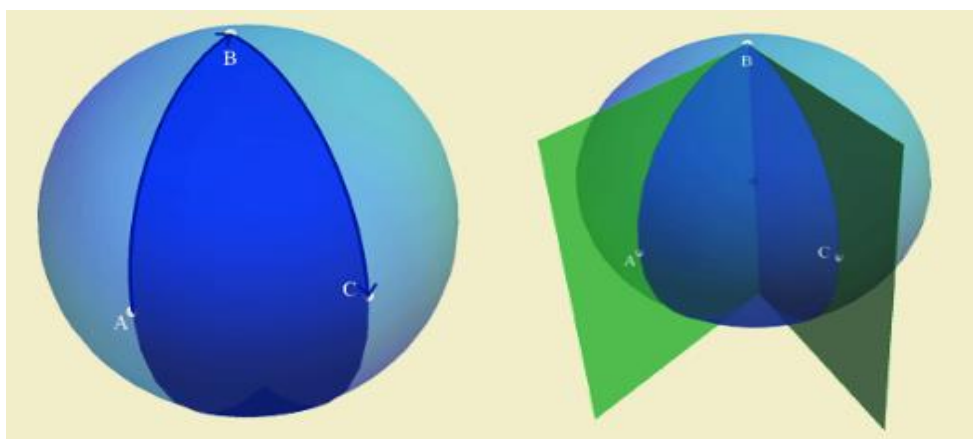
Nas próximas seções, apresentaremos algumas atividades práticas que utilizam a Geometria Esférica, bem como os passos da construção do transferidor esférico, que se tornou um objeto quase indispensável para as explorações de tal Geometria em sala de aula. Salientamos que tais atividades foram também pensadas com o intuito de atender a alguns dos Princípios Orientadores do DUA, tais como proporcionar opções para incentivar o interesse e proporcionar ações para a percepção, especificamente a percepção tátil de modo a facilitar o acesso à informação pelos alunos cegos.

### **Construção do Transferidor Esférico**

Como medir ângulos na Geometria Elíptica? Esta foi uma indagação presente desde o início de nossos estudos sobre o tema e nos levou até a conhecer a construção do transferidor esférico, proposta por Lénárt (1996) e apresentada pelo Prof. José Luiz Pastore Mello<sup>1</sup>. Nesta seção apresentaremos algumas adaptações, de modo que todos os estudantes, inclusive deficientes visuais, possam utilizar o transferidor para realizar as atividades propostas.

A construção do transferidor se apoia na ideia de ângulo na Geometria Elíptica, aqui nos valem do modelo esférico. Como ressaltamos no início do texto, uma reta na Geometria Esférica pode ser vista como um círculo máximo de uma esfera, consequentemente, um ângulo é definido como a região delimitada como duas 'retas'. Assim, a amplitude do ângulo corresponde à amplitude do ângulo orientado formado pelos semiplanos que contêm os lados do ângulo, ou seja, os semiplanos que contêm os semicírculos.

Figura 3: Representação do Ângulo Elíptico



Fonte: [https://www.atractor.pt/mat/GeomEs/saber\\_2.html](https://www.atractor.pt/mat/GeomEs/saber_2.html)

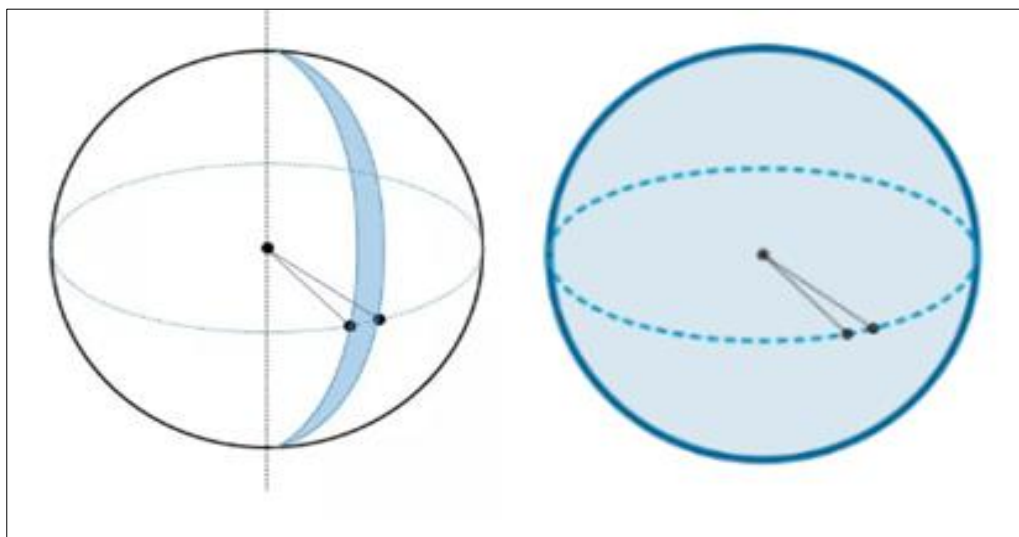
Voltando à pergunta que iniciou esta seção, como procedemos, então, para medir o

---

<sup>1</sup> Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=rMUIzmZsYuM&t=1089s>>. Acesso em 05 jun. 2019.  
ISSN 2526-2882

ângulo contido na Figura 3? Tal pergunta pode ser respondida valendo-se de conceitos estudados na Geometria Euclidiana: a ideia de ângulo central.

Figura 4: Relação entre ângulo elíptico e ângulo central de uma circunferência





Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/elementos-uma-esfera.htm>

A partir da Figura 4 é possível observar que o ângulo ABC indicado na Figura 3, pode ser associado ao ângulo central da circunferência que corresponde ao círculo máximo da esfera, uma vez que os semiplanos que contêm os lados do ângulo contêm o centro da circunferência. Portanto, medir o ângulo ABC é o mesmo que medir o arco por ele determinado em uma circunferência de raio igual ao da esfera, pois pela Geometria Euclidiana, o ângulo central em uma circunferência é igual ao arco que este determina. Sugerimos algumas indagações para serem exploradas em sala de aula: Como podemos construir uma régua para traçar retas na esfera? Qual unidade de medida seria mais adequada? Por quê?

Apresentaremos agora a construção de um transferidor que mede o arco de um fuso de um círculo máximo, ou seja, o ângulo na esfera. Para a construção foram utilizados os seguintes materiais: bola de isopor, plástico para transparência, régua, tesoura, cola transparente, durex ou fita dupla-face e caneta permanente. Abaixo, listamos os passos para a construção.

Quadro 1: Passos para construção do transferidor esférico

Passos	Ilustração
Com auxílio de uma linha, meça o comprimento do diâmetro da esfera e marque em uma tira de plástico.	
Divida este pedaço em 360 partes iguais com auxílio da régua e faça marcações com a caneta permanente. É importante que cada marcação seja feita também em alto relevo para que possa ser tateada. Utilizamos esmalte para fazer pequenas bolinhas, marcando os intervalos correspondentes a $10^\circ$ , possibilitando que um aluno cego, com os dedos, possa identificar as medidas.	
Corte mais quatro tirinhas de plástico e, utilizando a mesma proporção, faça marcações até $90^\circ$ em cada uma delas. Cole-as nas marcas de $0^\circ$ , $90^\circ$ , $180^\circ$ e $270^\circ$ da tira maior.	
Feche primeiro a tira maior, deixando uma pequena folga no diâmetro da circunferência. Cole as demais tiras, tomando cuidado para que o ângulo entre elas seja reto. Pronto, temos um transferidor esférico.	

Fonte: Elaborada pelos autores.

De posse do transferidor esférico, podemos então propor algumas atividades. O ideal é que tenhamos um transferidor e uma esfera (bola de isopor) para cada grupo de quatro alunos. Se o professor optar pela construção do transferidor em sala de aula, deve considerar



o tempo gasto para sua construção, principalmente devido à marcação nas tiras com a caneta e esmalte e o tempo para secagem da cola e do esmalte.

### **Atividade 1: Manuseando o transferidor e medindo ângulos**

Uma atividade consiste em familiarizar-se com o instrumento, o transferidor esférico e com os conceitos desta nova Geometria. Para isto, num primeiro momento solicitaremos aos alunos que marquem duas ‘retas’ (círculos máximos) utilizando linhas. É importante que sejam de texturas diferentes para que possam ser diferenciadas pelo toque. Utilizamos cores diferentes pois, além de ficar mais atrativo, também possibilita serem distinguidas visualmente, o que é importante, inclusive, para estudantes com baixa-visão. Na Figura 5 se pode ver o uso de uma linha laranja mais fina e uma linha verde mais grossa. Pode-se aproveitar o momento para indagar aos alunos: É possível desenhar uma linha reta na esfera? Todas as “retas” têm duas interseções? Podemos traçar duas “retas” paralelas? Por quê? O próximo passo é pedir que os alunos meçam, com o auxílio do transferidor, a amplitude do ângulo entre as duas ‘retas’ construídas. É importante notar que pela construção do transferidor ele garante que estejamos aferindo a medida de ângulos centrais.

Figura 5: Medindo ângulos com o transferidor esférico



Fonte: Elaborado pelos autores

Observando a Figura 5 concluímos que a medida do ângulo em questão está entre  $70^\circ$  e  $80^\circ$ . É possível, inclusive, fazer inferências sobre sua aproximação:  $74^\circ$ . Note que, é possível por meio do tato identificar a posição das duas ‘retas’ (linhas) e contar a amplitude do ângulo através das marcações em alto relevo com esmalte. Os alunos podem repetir a atividade, alterando a posição das retas até estarem familiarizados com o instrumento.

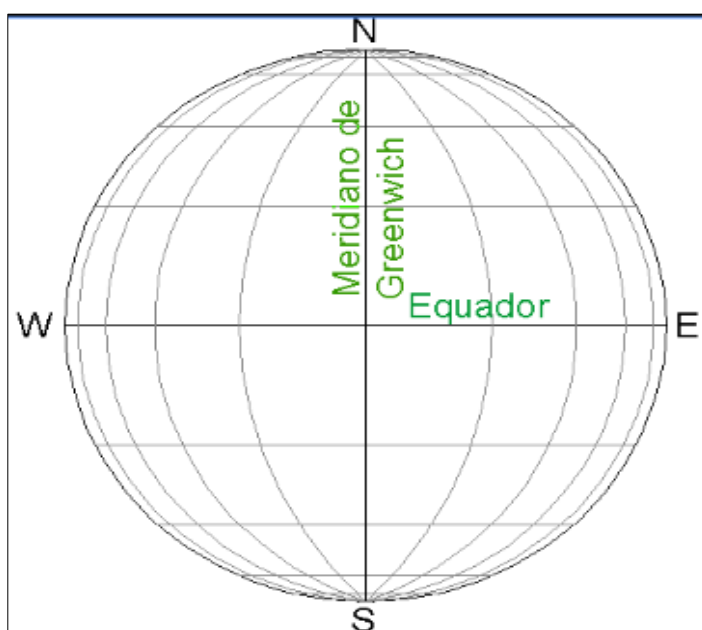


## Atividade 2: Calculando a distância entre duas cidades

Uma outra atividade possível de ser realizada a partir do transferidor esférico é o cálculo aproximado da distância entre duas cidades quaisquer do nosso planeta, utilizando a localização geográfica delas. Para isso, primeiramente marcamos o Equador e o Meridiano de Greenwich na esfera de isopor com duas linhas. Tais marcações devem respeitar as condições de serem círculos máximos ou geodésicas da esfera e que o ângulo entre eles seja de  $90^\circ$ , para o que utilizamos o transferidor construído. Utilizamos alfinetes para marcar os dois pontos de interseção para garantir que as linhas que representam o Meridiano de Greenwich e o Equador estejam bem fixadas. Utilizamos a linha laranja (mais fina) para representar o equador e a verde (mais grossa) para representar o Meridiano de Greenwich.

Vale lembrar que a longitude é medida em graus, de zero a 180 para leste ou para oeste, a partir do Meridiano de Greenwich. É medida ao longo do Equador, representando a distância entre um ponto e o Meridiano de Greenwich. Já a latitude é o ângulo entre o plano do equador à superfície de referência. Assim, a latitude mede-se para Norte ou para Sul, ao longo do meridiano de Greenwich, podendo variar entre  $0^\circ$  (no Equador) e  $90^\circ$  para Norte ou para Sul. Observe a figura a seguir.

Figura 6: localização geográfica: latitude e longitude



Fonte: <http://meioambiente.culturamix.com/noticias/historia-do-meridiano-de-greenwich>

Para o posicionamento de cada cidade devemos marcar, com o auxílio do transferidor, suas latitudes e longitudes representadas em graus. Por exemplo, a cidade de

Rio Claro/SP tem aproximadamente a seguinte localização: 22,4° S; 47,5° O (Figura 6).

Figura 7: Imagem de satélite da cidade de Rio Claro/SP



Fonte: Google Maps

Procedemos um exemplo para o cálculo da distância entre a cidade de Rio Claro/SP-Brasil e Paris-França. As coordenadas geográficas de Paris são: 48,9° N; 2,35° L. O primeiro passo é a marcação dos pontos que representam as cidades, que pode ser feita com alfinetes com cabeças coloridas. Este procedimento está representado abaixo na Figura 8. Note que registramos o nome das duas cidades também em Braille. Para calcular a distância real, precisamos fazer a ligação entre ambas. Utilizamos uma linha azul para medir esta distância, representada por um novo círculo máximo. Como estamos interessados apenas na distância entre as duas cidades, o restante do círculo máximo será desconsiderado (digamos que a maior parte), restando assim um segmento (arco) que une as cidades.

Figura 8: Medindo a distância entre Rio Claro e Paris



Fonte: Elaborado pelos autores

ISSN 2526-2882

Por fim, o cálculo pode ser feito sem maiores dificuldades, aplicando uma regra de três simples, levando em consideração os raios do planeta e da esfera de isopor utilizada e a medida do arco entre Rio Claro e Paris.

Salientamos que essa atividade pode se constituir também em uma abordagem interdisciplinar com a disciplina de Geografia. Esta proposta de integração já foi anunciada pelos PCN: “as possibilidades de integração da Matemática com as outras áreas do ensino fundamental ficam evidentes, como Ciências Naturais (densidade, velocidade, energia elétrica) ou Geografia (**coordenadas geográficas**, densidade demográfica, escalas de **mapas** e guias) (BRASIL, 1998, p. 85, grifo nosso). Dessa forma, ao trabalhar com coordenadas geográficas o professor abordará também ideias importantes da Geometria (círculos máximos, ângulos, distância entre dois pontos, raio etc.) quando trabalhados no contexto da superfície terrestre, para que assim possibilite uma melhor compreensão por parte do aluno.

### **Considerações Finais**

Apesar de constarem em documentos oficiais brasileiros, a abordagem de geometrias não-euclidianas é pouco explorada nas aulas de Matemática das escolas e universidades. Consideramos que abordar conteúdos da Geometria Esférica na Educação Básica possibilita que o aluno possa relacionar tal conhecimento com seu cotidiano, compreender os diferentes modelos geométricos que os cerca, ampliando o repertório de seu pensamento geométrico para além das ideias apresentadas por Euclides.

Neste texto apresentamos uma reflexão e propomos atividades de ensino de Geometria Esférica nas premissas do DUA, acessível a todos estudantes. Salientamos que tais atividades foram também pensadas com o intuito de atender a alguns dos Princípios Orientadores do Desenho Universal para a Aprendizagem tais como possibilitar opções para incentivar o interesse e proporcionar ações para a percepção, especificamente a percepção tátil, de modo a facilitar o acesso à informação aos alunos cegos. As propostas de atividades aqui apresentadas podem servir como base para o ensino de Geometria Esférica porque levam as definições desta geometria para uma parte mais visual e prática.

Ao levarmos essas propostas de atividades envolvendo o ensino da Geometria Esférica para todos os estudantes, independentemente de suas deficiências, especificidades ou dificuldades, estamos pensando em uma educação inclusiva.

### **Referências**

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 3.  
BORGES FILHO, Francisco. **O desenho e o canteiro no Renascimento Medieval**

- (séculos XII e XIII):** indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores. 2005. Tese (Doutorado em Estruturas Ambientais Urbanas) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/16/16131/tde-13102005-115856/pt-br.php>> Acesso em: 28 mai. 2019.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2017.
- BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. As Geometrias Esférica e Hiperbólica em Foco: sobre a Apresentação de alguns de seus Conceitos Elementares a Estudantes do Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 419-427, abr. 2015. Disponível em <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-636X2015000100024](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000100024)>. Acesso em 28 mai 2019.
- CARLETTO, A. C.; CAMBIAGHI, S. **Desenho Universal: Um Conceito Para Todos**. São Paulo, SP: Instituto Mara Gabrilli, 2008, 38p. Disponível em: <[http://www.vereadoramaraabrilli.com.br/files/universal\\_web.pdf](http://www.vereadoramaraabrilli.com.br/files/universal_web.pdf)>. Acesso em 03 jun. 2017.
- CAST. **Universal Design for Learning Guidelines**, version 2.0. Wakefield, MA: Author, 2011. Disponível em: <<http://www.udlcenter.org/aboutudl/udlguidelines/downloads>>. Acesso em 15 jun. 2018.
- COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não Euclidianas**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- DEVITO, A.; FREITAS, A. K.; PEREIRA, K. C. **Geometrias Não- Euclidianas**. Disponível em: <[http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao\\_euclidiana](http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana)>. Acesso em 6 jul. 2019.
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- FERNDANDES, S. H. A. A. **Uma análise vygotskiana da apropriação do conceito de**

- simetria por aprendizes sem acuidade visual.** 2004. 250 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2004.
- GUIMARÃES, D. R.; PEROVANO, A. P. Atividades investigativas para exploração de conteúdos da Geometria Esférica com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. São Paulo, v.9, n.2, p. 20 - 34, 2020. doi:<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i2p020-034>.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática: ciências e aplicações: ensino médio**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2.
- LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: activities comparing planar and spherical geometry**. USA: Key Curriculum Press, 1996.
- LORENZATO, S. Como aprendemos e ensinamos geometria. In: LORENZATO, S. **Aprender e ensinar geometria**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2015. Série Educação Matemática.
- PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares de matemática para as séries finais do ensino fundamental e para o ensino médio**. Disponível em: <<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/>>. Acesso em 19 mar. 2010.
- ROSA, E. R.; DUTRA, M. C. Pessoas Cegas: trabalho, história, educação e organização no Brasil. In: HISTEDBR - História, Sociedade e Educação no Brasil. VI Seminário de Estudos e Pesquisas - 20 Anos de HISTEDBR: Navegando pela História da Educação Brasileira, 2006, Campinas/SP. **Anais...** Campinas/SP. p. 01-26. Disponível em: <[http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer\\_histedbr/seminario/seminario7/TRABALHOS/E/Enio%20rodrigues%20da%20rosa.pdf](http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/seminario/seminario7/TRABALHOS/E/Enio%20rodrigues%20da%20rosa.pdf)>. Acesso em 25 jun. 2019.
- SÃO PAULO. **Desenho Universal: Habitação de Interesse Social**. Secretaria de Estado da Habitação. São Paulo: SEH/ CDHU/ SCS, mar. 2010. Disponível em: <<http://www.mpsp.mp.br/portal/page/portal/Cartilhas/manual-desenho-universal.pdf>>. Acesso em 18 jun. 2018.
- SANTOS, W. T. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. Trabalho de Conclusão de Curso. 2016.
- SEGADAS, C. Et. al. Como trabalhar atividades matemáticas com alunos deficientes visuais?. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. **Anais...** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011
- TENÓRIO, R. M. **A Razão e o tempo: trilhas da Matemática na teia da História**. Salvador: EDUFBA, 2009
- VIGOTSKI, L. S. **Fundamentos de defectologia**. In: Obras completas. Tomo V. Trad. De

Maria del Carmen Ponce Fernandez. Havana: Editorial Pueblo y Educación, 1997.

### ***Biografia Resumida***

---

**Priscila Coelho Lima:** Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP. Professora EBTB do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus São José dos Campos.

**Lattes:** <http://lattes.cnpq.br/7384789723533672>

**Contato:** [cilalima@ifsp.edu.br](mailto:cilalima@ifsp.edu.br)

**Ana Paula Perovano:** Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP. Professora Assistente do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

**Lattes:** <http://lattes.cnpq.br/8892821688981110>

**Contato:** [apperovano@uesb.edu.br](mailto:apperovano@uesb.edu.br)

**Douglas Ribeiro Guimarães:** Mestrando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP.

**Lattes:** <http://lattes.cnpq.br/8101179217304622>

**Contato:** [douglasrguimaraes@hotmail.com](mailto:douglasrguimaraes@hotmail.com)