

Uma discussão sobre Geometria: diferentes perspectivas do problema da duplicação do cubo

Rodolfo Masaichi Shintani 

Carolina Yumi Lemos Ferreira Gracioli 

Resumo

Nesse artigo discutimos como a Geometria é constituída e quais suas diferentes formas de representação. Para darmos conta disso a que nos propomos, apresentaremos o problema da duplicação do cubo, um dos três problemas clássicos da Geometria, considerando três perspectivas geométricas: a Geometria Euclidiana, a Geometria do Origami e a Geometria Analítica. Nesses três modos de tratar os objetos geométricos, discutiremos o problema da duplicação e sua impossibilidade de resolução utilizando os instrumentos euclidianos. Apresentaremos uma dobradura que soluciona o problema, sem o uso dos instrumentos euclidianos e, por meio da contribuição do método empregado por René Descartes, demonstraremos que a grandeza encontrada por meio das dobras equivale a grandeza requerida no problema clássico. Diante dessas possibilidades concluímos que a Geometria está em constante desenvolvimento e que por mais diversas que sejam as formas de representação, em essência, elas tratam de um mesmo objeto matemático.

Palavras-chave: Geometria do Origami, Geometria Analítica, Geometria Euclidiana, Duplicação do cubo.

A discussion on Geometry: diferent perspectives of the problem of doubling the cube

Rodolfo Masaichi Shintani

Carolina Yumi Lemos Ferreira Gracioli

Abstract

In this article, we discuss how Geometry is constituted and what are its different forms of representation. In order to realize this that we propose, we will present the problem of duplication of the cube, one of the three classic problems of geometry, considering three geometric perspectives: Euclidean Geometry, Origami Geometry, and Analytic Geometry. In these three ways of treating geometric objects, we will discuss the problem of duplication and its impossibility to be solved using Euclidean instruments. We will present a folding that solves the problem, without the use of Euclidean instruments and, through the contribution of the method employed by René Descartes, we will demonstrate that the greatness found through the folds is equivalent to the greatness required in the classical problem. Given these possibilities, we conclude that Geometry is in constant development and that, however diverse the forms of representation may be, in essence, they deal with the same mathematical object.

Keywords: Origami Geometry, Analytic Geometry, Euclidean Geometry, Doubling the cube.

Introdução

A ideia deste artigo surgiu durante a disciplina de Fundamentos de Geometria, cursada no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP, campus de Rio Claro. Nessa disciplina tivemos contato com diferentes perspectivas geométricas, dentre as quais a Geometria Euclidiana, Geometria Hiperbólica e a Geometria Esférica. No entanto, a Geometria do Origami nos despertou curiosidade e foi pertinente, pois além de ser tema da pesquisa de mestrado da segunda autora deste artigo, permite a resolução de dois dos problemas clássicos, sem a restrição dos instrumentos euclidianos, *o problema da duplicação do cubo* que consiste em, dado um cubo de aresta qualquer, encontrar a medida da aresta do cubo de volume duplicado em relação ao primeiro e *o problema da trissecção do ângulo*, que propõe que, dado um ângulo de amplitude qualquer dividi-lo em três partes iguais. Os problemas clássicos da Geometria ainda contam com um terceiro problema, *o da quadratura do círculo*, que é equivalente a encontrar um quadrado que possua a mesma área de um círculo dado (SANTANA, 2013). Todos os problemas clássicos buscam soluções por meio das construções com régua e compasso, instrumentos euclidianos.

Destacamos que, apesar desses instrumentos possibilitarem inúmeras construções em Geometria, existem algumas que são impossíveis com os instrumentos euclidianos, como a resolução dos problemas clássicos da Geometria que envolvem equações cúbicas, em especial, o problema da duplicação e da trissecção do ângulo. Por isso, os problemas clássicos da Geometria nos interessam, pois apesar de serem problemas que surgem na antiguidade, foi somente no século XIX que demonstrações formais da impossibilidade de resolução dos problemas clássicos por meio dos instrumentos euclidianos se tornou possível. No que concerne, a Geometria do Origami apresenta possibilidades construtivas para os problemas da duplicação e da trissecção, o que nos chamou a atenção, dado que mesmo sendo oriundos do contexto da antiguidade Ocidental, dois deles são resolvidos por uma perspectiva Geométrica Oriental.

Sendo assim, interrogamos o significado do termo Geometria, ou seja, buscamos compreender o que há de comum no que se estuda sob o nome geometria. Iniciamos nossa busca, recorrendo a etimologia da palavra *Geometria* que, do grego, significa *medida da Terra*. Isso nos faz pensar que, em um dado momento histórico, surge a necessidade do ser humano compreender o ambiente que o cercava, levando os primeiros geômetras a estabelecerem relações métricas que, ao longo da prática, poderiam ser generalizadas, se caracterizando em saberes Geométricos. Com o tempo, novos saberes foram estruturados e

transmitidos para as futuras gerações, a partir do registro, o que, a longo prazo, permite estabelecer um campo de conhecimento definido como Geometria.²

Na Geometria Euclidiana vê-se, já no Livro I dos *Elementos* de Euclides (2009, p. 97), as seguintes definições “ponto é aquilo de que nada é parte”³, “e linha é comprimento sem largura”⁴, “e superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura”⁵. A partir disso, pressupõem-se que a Geometria já não estivesse enclausurada na definição etimológica, pois não há nos objetos que nos cercam – mundo sensível – a presença do ponto, da reta e da superfície como definidos pela Geometria Euclidiana. A superfície que pode ser exemplificada no mundo físico é detentora de um volume, mesmo que ele esteja tendendo a zero e isso torna a superfície proposta pela Geometria Euclidiana, um objeto sem existência sensível. O mesmo pode ser dito da linha e do ponto – sensível. Sendo assim, por que a Geometria Euclidiana, que trata de objetos aparentemente distintos, ainda se nomeia Geometria? Não sendo medida da terra, destaca Tenório (1994), a aplicação da Geometria Euclidiana no contexto de medir o mundo, apesar de em muitos casos propiciar boas estimativas detém limitações.⁶ Consta-se ainda, que a Geometria Euclidiana permite o estudo de realidades não presentes no mundo sensível.

Desse modo, a Geometria Euclidiana com sua estrutura axiomática e logicamente constituída, possibilita o estudo de realidades que não são as presentes em nosso mundo físico, mas que podem ser utilizadas para estudar fenômenos físicos. No entanto, mesmo que aceitemos que a Geometria parte da mensuração e caminha para um saber axiológico e desamarrado do mensurar, outras tantas possibilidades se abrem, dentre essas, fomos provocados pelas reflexões de Edmund Husserl (1859 – 1938) que apresenta a Geometria como uma ciência em desenvolvimento e perpetuada pela constante concessão dos saberes desenvolvidos por uma geração, para a geração subsequente por meio da tradição.

A Geometria em uma perspectiva histórica transcendental

Talvez investigar a Geometria fosse mais simples questionando os primeiros geômetras sobre o que eles entendiam e quais suas finalidades para as construções ou os argumentos que fundamentaram as primeiras noções geométricas. Entretanto, isso não é

² “A palavra [Geometria] é formada por duas palavras gregas, γῆ, ou γαῖα, terra, e μέτρον, medida. Essa etimologia parece nos indicar o que propiciou o nascimento da Geometria. Imperfeita e obscura em sua origem, como todas as ciências, começou por uma espécie de tatear, com mensurações e operações grosseiras, e elevou-se aos poucos ao grau de exatidão e sublimidade em que a encontramos” (D’ALEMBERT, 2015, p. 89).

³ (EUCLIDES, 2009, p. 97).

⁴ (EUCLIDES, 2009, p. 97).

⁵ (EUCLIDES, 2009, p. 97).

⁶ “para fazer um mapa da cidade de Salvador, pode-se usar projeção plana, mas não para o mapa das Américas, precisamos, neste caso, usar projeção esférica, pois as deformações seriam monstruosas se usássemos projeção plana” (TENÓRIO, 1994, p. 73)

possível. Consequentemente a alternativa para compreender como o fato se desenvolveu é nos voltarmos para as suas raízes. Nesse movimento de voltar-se para duas considerações são possíveis: a de que o fato é conhecido de modo contestável tendo aspectos ainda desconhecido pelos estudiosos ou nem mesmo foi mensurado pelos protagonistas.

Conforme Nobre (2004), os fatos que definem um momento histórico podem ser alterados, pois as verdades se alteram ao longo do tempo, o que indica que as verdades absolutas de uma época podem em outra, serem consideradas verdades relativas ou mesmo não serem mais consideradas verdades. Essa dinâmica faz com que os historiadores estejam frequentemente aprofundando o estudo de uma época, o que os levam a constantes análises e reescritas da história, gerando um ciclo: “com o aprofundamento das investigações históricas, novas verdades são descobertas, novas interpretações são dadas a elas e a escrita da história ganha novos direcionamentos” (NOBRE, 2014, p. 532). Nesse compreender, o momento de gênese da Geometria pode não ser aquele que é retratado nos livros históricos, estando o fato relatado em meio a esse constante ciclo abordado por Nobre (2014). Isso faz com que o momento de gênese aceito em uma determinada época possa não ter sido o do nascimento de uma ideia, mas um dos estágios do conhecimento.

Esse cenário não é único há outras possibilidades, como: ver que o momento considerado como o da gênese desse saber nem ter sido notado pelos primeiros geômetras. Conforme destaca Le Goff (2015), a periodização da história, apesar de ser necessária, enfrenta dilemas, pois a periodização é um ato humano, artificial e provisório. Husserl (1970), ao questionar sobre a origem da geometria, salienta que nada conhecemos acerca dos primeiros geômetras. Contudo, foram esses indivíduos que, conscientes da totalidade ou não de seus atos, nos legaram algo que constitui, ao longo da história, parte fundamental da Geometria. Admitir que os primeiros geômetras foram os responsáveis por iniciar, mesmo que de modo modesto, o escopo do que ao longo dos tempos vem a se constituir em um ramo denominado Geometria, permite afirmar que são esses indivíduos responsáveis pela transmissão de saberes que se caracterizam como tradição, a qual passa a ser herdada pelas gerações futuras.

O mundo cultural todo, em todas as suas formas, existe por meio da tradição. Estas formas surgiram como tal não apenas casualmente; também já sabemos que tradição é precisamente tradição, tendo surgido dentro do nosso espaço humano através da atividade humana, isto é, espiritualmente, mesmo embora geralmente nada saibamos, ou quase nada, da proveniência particular e da origem espiritual que as trouxeram (HUSSERL, 1970, p. 4).

Os elementos que compõem o mundo cultural herdado, em muitos casos podem escapar aos fatos atribuídos à sua criação. E, com esse compreender, Husserl considera que o

questionamento a partir de uma história consolidada, ou como denotada, de história factual, não possibilita ver o que ainda é desconhecido, pois está a mercê da interpretação dos fatos conhecidos. Para Husserl deve-se inquirir, para além dos fatos conhecidos, ou seja, transcender o que tem sido narrado factualmente, de modo que seja possível compreender. No caso da Geometria, buscar sua gênese nos fatos históricos não é um caminho, não porque a história seja um método inadequado, mas porque a história enquanto factual está limitada aos fatos conhecidos. Sobre isso, Bicudo (2016, p. 31 - 32) salienta que Husserl defende que se deve,

intencional uma história que busque pela “origem” e não aquela que se atém ao relato do desenvolvimento e encadeamento dos fatos “históricos”. E vai além da busca pela origem, preocupando-se em mostrar como o evidenciado na origem se enrola em compreensões e expressões/ compreensões entre sujeito, que, pela linguagem e pela tradição vai se mantendo presente ao mundo histórico-cultural, que, também, pode ser entendido como o mundo do a priori histórico onde vivemos na circunvizinha (*sic*) do que aí está como dado.

Restrepo (2010) corrobora esse pensar afirmando que em Husserl, o nascimento de um indivíduo situa-se no mundo cultural que compõe o mundo-vida, que está dado (*vorgegeben*) como preexistente. Portanto, quais alternativas são dadas ao neonato, recém-chegado nesse espaço consolidado? Aprender o que já está sendo operado por toda uma tradição, ou seja, se apropriar dos conceitos consolidados. A alternativa de mudar ou recusar o que está consolidado é posterior a toda assimilação e apropriação do precedente. Essa apropriação não é meramente pertencente a uma parte dos indivíduos senão a todos os povos que compartilham o *vorgegeben*, isto é, todo e qualquer indivíduo. O que diferencia os povos e as comunidades que vivem no *vorgegeben* são as concepções do mundo. Conforme Føllesdal (s.d, p.70, tradução nossa)

Existe apenas um mundo-vida no seguinte sentido: o mundo que aparece para uma pessoa em suas múltiplas experiências é sempre o mesmo, e este também é o mundo que aparece para os outros, independentemente de quando e onde eles vivam. Nossas concepções deste mundo podem diferir e, nesse sentido, todos nós vivemos em mundos diferentes. Mas, diferente não é o mesmo que distinto. O mundo em que cada um de nós vive é único, mas se manifesta para cada um de nós de modos diversos.⁷

⁷ “Hay sólo un mundo de la vida en el siguiente sentido: el mundo que se le aparece a una persona en sus múltiples experiencias es siempre el mismo, y éste es también el mundo que se le aparece a los demás sin que importe cuándo y donde vivan. Nuestras concepciones de este mundo pueden diferir y, en este sentido, todos vivimos en diferentes mundos. Pero diferente no es lo mismo que distinto. El mundo en el que vive cada uno de nosotros es único, pero se manifiesta a cada uno de nosotros de modos diversos”. (FOLLESDAL, s.d, p. 70).

Sendo assim, interpretamos que os saberes podem, em cada uma das civilizações, serem expressos de modos distintos, mesmo que essas civilizações estejam investigando os mesmos objetos, em essência⁸. Isso acontece, pois os povos compartilham o *vorgegeben* e as múltiplas possibilidades de manifestar os saberes constituídos em cada uma das civilizações, o que é entendida como *noese*⁹. Esses modos de ver ou de percepção, são apresentados a partir de toda uma atribuição de sentido pelo indivíduo. No entanto, os distintos modos de perceber podem ser expressos e, nisso, mantém certa característica ou uma essência que é única, que permanece ou se mantém permitindo a comunicação. Em sua obra *A origem da Geometria*, Husserl (1970, p. 7) destaca que,

O teorema de Pitágoras, e assim também (deveras) toda a Geometria, existe apenas uma vez, não importa quão freqüentemente ou mesmo em que linguagem possa ser expressa. É identicamente a mesma na “linguagem original” de Euclides e em todas as “traduções”; e dentro de cada linguagem ela é novamente a mesma, não importa quantas vezes ela foi sensivelmente expressa da expressão original e anotada à inumeráveis expressões orais ou escritas e outras documentações.

A partir do dito por Husserl (1970), mesmo que na contemporaneidade nos debrucemos sobre o livro *The Pythagorean Proposition*, escrito por Elisha Scott Loomis, no qual é apresentada uma coleção de mais de 300 formas de mostrar a relação pitagórica, nada de diferente fluirá desses outros modos abordados no livro. Em outras palavras, a relação de Pitágoras continuará a mesma, conforme foi demonstrada nos Elementos de Euclides, em qualquer uma dessas mais de 300 formas. No entanto, os modos distintos de expressar essa relação podem ser disparadores para outras relações que ainda não integram o mundo cultural, “[...] uma vez surgiu a Geometria, que estava presente como uma tradição de milênios, que ainda está presente para nós, e ainda está sendo elaborada num desenvolvimento vivo” (HUSSERL, 1970, p. 4). Buscando explicitar as inúmeras manifestações da Geometria, dentre essas: a Geometria Euclidiana, a Geometria Analítica e a Geometria do Origami. Olharemos para as possibilidades de tratamento do problema da duplicação do cubo em cada uma dessas manifestações.

⁸ Conforme destaca Rocha (2010) em Aristóteles, o conceito de essência está ligado com a natureza da coisa, ou melhor é a coisa por ela mesma, conforme afirma Aristoteles (met. Z4, 1029b 14-1030^a 6, apud ROCHA, 2010, p. 3). Por outro lado, em Husserl “a essência de que trata a fenomenologia não é idealidade abstrata dada *a priori*, separada da práxis, mas ela se mostra nesse próprio fazer reflexivo” (BICUDO, 1994, p. 21).

⁹ “[...] o noese é a parte da vivência da realidade apresentada na qual o sujeito poderá descrever as suas impressões, sentimentos e outros elementos que a vivência desta realidade proporcionou a ele. O noese tem a ver com o corpo do indivíduo diante o fenômeno, possibilitando o sujeito a entrar em contato com os sentimentos suscitado pelo fenômeno e/ou nomear os afetos provocados pela experiência e que fazem parte da construção do conhecimento da realidade” (FERREIRA, 2015, p. 21857).

Euclides e a Geometria Euclidiana

Apesar de pouco conhecermos sobre Euclides, sua obra mais famosa *Os Elementos* chama atenção, especialmente, pelas construções de objetos da Geometria plana em que foram usados instrumentos, mais especificamente, régua e compasso não graduados. Por muito tempo acreditou-se que Euclides, ao compilar as demonstrações das construções propostas nos livros que compõem *Os Elementos*, teria imposto essa restrição, o uso dos instrumentos não graduados, por influência platônica. Entretanto, como destaca Roque (2012), não existem evidências de que essa restrição existiu. A autora evidencia, ainda, sua relevância didática, uma vez que, “as construções feitas desse modo [com régua e compasso] são mais simples e não exigem nenhuma teoria adicional (como seria o caso das construções por meio de cônicas)” (ROQUE, 2012, p. 161). Isso pode nos levar a compreender as possibilidades da Geométrica da época, ou seja, compreender o que era possível ser realizado em Geometria apenas com o uso de régua e compasso, como se houvesse uma mensagem implícita na obra que nos permite ver “tudo o que [se] pode fazer em geometria com o uso somente da régua e do compasso” (ROQUE, 2012, p. 163)

Apesar de todas as especulações sobre a obra, sua relevância é notória, mesmo no mundo pós-moderno, observa-se que *Os Elementos* permanecem entre as referências indicadas nos cursos de matemática e, como destaca Ávila (2001, np), “Os Elementos são hoje uma obra antes de tudo de valor histórico”. Esse valor histórico está relacionado ao modo particular empregado na Geometria da obra, um modo que não apresentava interesse em uma matemática estritamente prática, optando por uma matemática teórica.

No meio pré-euclidiano o pensamento geométrico era sofisticado, mas não contava com o caráter dedutivo expresso nos *Elementos*. Com Euclides, a matemática grega passou a se distinguir por sua estrutura teórica. Lembremos que os mesopotâmicos e egípcios possuíam técnicas de cálculo elaboradas, entretanto, seus métodos eram apresentados na forma de soluções para problemas específicos, ainda que válidas para casos mais gerais (ROQUE, 2012, p. 138).

Domingues (2002) destaca a importância da obra *Os Elementos*, em virtude de sua organização lógica e uso do método axiomático e dedutivo que possibilitou a demonstração de “[...] nada menos que quatrocentas e sessenta e cinco proposições” (DOMINGUES, 2002, p. 59). Dentre as hipóteses que sustentam a utilização do método axiomático e dedutivo está a motivação filosófica, ou seja, a escolha por este método não foi motivada pela necessidade matemática, mas externa a matemática, foi motivada pela filosofia que, de acordo com Bicudo (1998, p. 312), nos permite entender esse aspecto teórico da obra de Euclides que não está voltado para uma matemática aplicada. Segundo o autor, “a mudança /.../ da matemática ‘empírica’ para a matemática ‘pura’ está intimamente associada ao caráter idealista, anti-

empírico da filosofia eleática e, sobretudo, da filosofia de Platão”. Cabe destacar que, apesar de não possuímos uma convergência relativamente à motivação das interpretações de Euclides, seus trabalhos muito influenciaram a Matemática e, em especial, a Geometria. Na continuidade deste texto, apresentaremos aspectos da Geometria Analítica como proposta por René Descartes em 1637 dando continuidade a nossa intenção de compreender as diferentes manifestações da Geometria.

Descartes e a Geometria Analítica

René Descartes (1596 – 1650) apresenta em sua obra *A Geometria* (1637), uma articulação entre Álgebra e Geometria. A algebrização dos elementos geométricos, potencializa um olhar distinto daquele da Geometria Euclidiana, pois, enquanto a intenção euclidiana está ligada aos procedimentos necessários para efetuar uma construção geométrica usando instrumentos e demonstrar sua validade usando o método dedutivo, na Geometria proposta por Descartes, a construção é um recurso adicional, que pode ser usado caso seja necessário. Na Geometria de Descartes a ênfase está no método analítico, como expõe Battisti (2010). O método analítico consiste em inverter a ordem da demonstração, ou seja, ao invés de partir dos axiomas para constituir a demonstração, assume-se a veracidade do teorema e partindo de sua veracidade, busca-se uma condição que possibilite a validade lógica do teorema.

A etapa analítica começa por assumir como verdadeiro o teorema que deseja provar. A partir dessa pressuposição inicial, ela procura encontrar uma condição anterior, da qual o teorema possa ser derivado e, sucessivamente, outra condição anterior à primeira, até que se chegue a uma verdade já demonstrada ou a um primeiro princípio. Conquistada tal proposição (um axioma ou um teorema já conhecido), procede-se à demonstração do teorema inicial, começando pelos resultados do procedimento anterior e pela inversão de seus passos, até que se tenha cumprido o objetivo (a prova do teorema) (BATTISTI, 2010, p. 585).

Sapunaru (2015), em introdução a tradução da obra *a Geometria* de Descartes, diz:

[...] penso que Descartes na obra *A Geometria* estava focado somente na solução de problemas, pois para ele, essa era a verdadeira missão da Matemática. A axiomática dos antigos era coisa do passado: não poderia ter vez nessa nova fase da Matemática que ele estava prestes a inaugurar. Assim sendo, em *A Geometria* onde Descartes revela sua Geometria Analítica, em se tratando de método, ele não faz uso da síntese em momento algum, mas somente da análise (SAPUNARU, 2015, p. 5).

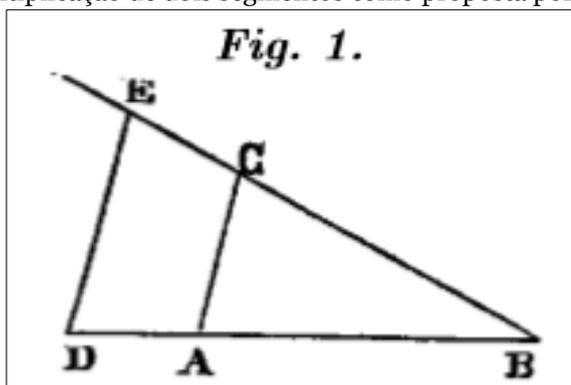
Rojas, Llanos e Otero (2016, *apud* DE LA TORRE GÓMES, 2006) indicam que, na nomenclatura de Geometria Analítica, o termo “analítica” é influenciado pelo método analítico proposto pelo matemático François Viète (1540 – 1603) em sua obra *arte analítica*, cabendo destacar que, como apontado por Corrêa (2008), no século XVI, apesar da Álgebra se constituir como uma poderosa ferramenta para solução dos problemas, ela não detinha o

mesmo prestígio da Geometria que, desde os gregos, consolidava sua importância. O projeto matemático de Viète era ressaltar a importância da Álgebra.¹⁰ Descartes, partindo de dois campos distintos da matemática, a Geometria e a Álgebra, consolidou uma Geometria que refletisse sua filosofia, que agregasse seu método filosófico, vindo seu escrito *A Geometria* a se constituir um apêndice da obra *O Discurso do Método*.

Descartes agora tem uma base sólida para propor uma ciência matemática de caráter rigoroso, preciso e sistemático. *O Discurso do Método* propõe um modelo quase matemático para conduzir o pensamento humano em busca das verdades, colocando em dúvida toda a base de conhecimento herdado para produzir uma nova construção sólida, uma vez que a matemática tem por característica a certeza, com procedimentos corretos e ordenados isentos de dúvidas finais (PINTO, 2016, p. 61).

A Geometria apresentada pelo filósofo francês se distingue da Geometria Euclidiana, pois, enquanto a Geometria Euclidiana se estrutura a partir de um modelo particular – axiomático e dedutivo –, a Geometria Analítica enfatiza a análise. No entanto, a distinção entre ambas Geometrias não se restringe apenas ao método. De acordo com Coneglian, Santos e Melo (2010), desde os matemáticos gregos até o renascimento com Viète, acreditou-se que a multiplicação entre duas variáveis gerava uma área, a de três variáveis o volume. Tal fato foi confrontado em *A Geometria*, onde se concebe um segmento como o produto da multiplicação de outros dois segmentos dados. Como proposto por René Descartes, vamos investigar a multiplicação dos segmentos BD e BC .

Figura 1: A multiplicação de dois segmentos como proposta por René Descartes



Fonte: Descartes (2015, p. 13).

¹⁰ “O objetivo da análise de Viète era, portanto, segundo Bos, fundar um método universal para resolver problemas cuja principal ferramenta era a álgebra. Para Barbin e Boyé (2005, p.2-3), ao apresentar a sua Introdução à Arte Analítica, Viète queria ir além dos matemáticos gregos. É importante lembrarmos que, no final do século XVI, o padrão grego ainda vigorava na comunidade matemática, ainda que a álgebra já se impusesse como uma ferramenta de grande valia. Assim, quando Viète retomou os problemas de Diofanto, nos Cinco Livros das Zetéticas, não podemos afirmar que ele estava estudando uma obra antiga com um novo olhar. Na verdade, ele pretendia mostrar que a sua arte analítica permitia que problemas antigos fossem resolvidos com toda a elegância e rigor que a Matemática exige. Além disso, ele também queria provar que esta arte era capaz de propor outros problemas como, por exemplo, problemas numéricos que podem ser resolvidos com letras”. (CORRÊA, 2008, p. 56)

Considerando o segmento AB como unitário, traçamos o segmento AC . Em seguida prolongamos o segmento BC de modo que seja possível traçar uma paralela ao segmento AC que intercepte o prolongamento do segmento BC e tenha o ponto D , como extremo do segmento. O ponto de intercessão entre o prolongamento do segmento BC e o segmento paralelo ao segmento AC , será denominado de ponto E . Como ABC e BED são triângulos e são semelhantes, é possível deduzir que:

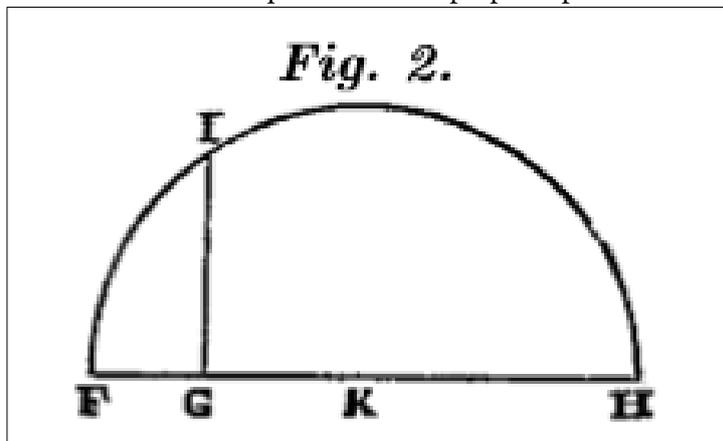
$$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \rightarrow BE = \frac{BD \cdot BC}{AB} \rightarrow BE = BD \cdot BC$$

Nesse diagrama apresentado pelo filósofo, também é possível investigar a divisão de segmentos, caso seja necessário efetuar a divisão dos segmentos BE por BD , assumindo AB como unitário teremos:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{BE}{BD} = \frac{BC}{1} \rightarrow \frac{BE}{BD} = BC$$

Na continuidade do texto é proposto o método de extração da raiz quadrada de um segmento. Vamos supor que seja necessário extrair a raiz quadrada de um segmento dado GH , como apresentado na ilustração abaixo:

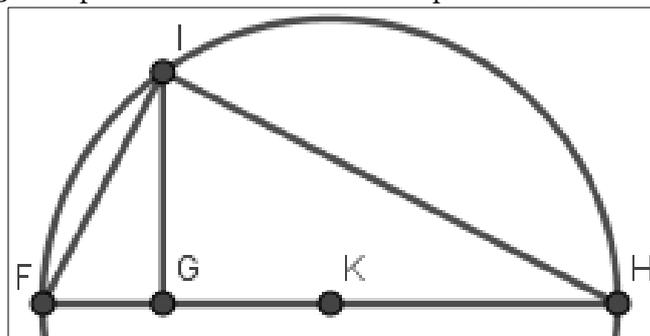
Figura 2: O cálculo da raiz quadrada como proposto por René Descartes.



Fonte: Descartes (2015, p. 13).

Demarcamos o segmento unitário FG na extremidade do segmento GH . Construído o segmento FH , encontraremos o ponto médio do segmento que será denotado pelo ponto K . Com centro do compasso no ponto K e raio FK traçamos uma semicircunferência. Em seguida, construímos um segmento perpendicular ao segmento FK de modo que o segmento tenha como extremidade o ponto G e defina o ponto I na semicircunferência. O segmento GI é a raiz quadrada do segmento GH . Para compreender a justificativa do procedimento de René Descartes, vamos construir o triângulo FHI .

Figura 3: Compreendendo o cálculo da raiz quadrada de René Descartes



Fonte: os autores.

O triângulo FHI é dividido em dois triângulos pelo segmento GI definindo os triângulos FGI e GHI, como GI é perpendicular ao segmento FH , os triângulos FGI e GHI são triângulos retângulos. Como FHI é inscrito em uma semicircunferência, ele também é retângulo¹¹. Em razão disso, bem como utilizando as relações métricas nos triângulos retângulos, temos que a altura do triângulo FHI pode ser expressa como:

$$GI^2 = FG \cdot GH$$

Como FG foi tomado como unitário, temos:

$$GI^2 = GH \rightarrow GI = \sqrt{GH}$$

A partir do exposto, percebemos que a Geometria não se caracteriza apenas pelas construções com os instrumentos euclidianos, como em Euclides (2009) ou é restrita pelo emprego do método analítico cartesiano, em Descartes (2015). Ela pode ser interpretada por diversos olhares além dos destacados anteriormente. Na continuidade, deste texto apresentamos outra possibilidade: a perspectiva da Geometria a partir dos Origamis.

Humiaki-Hatori, Lang e a Geometria do Origami

A palavra Origami, ou 折り紙, advém da junção das palavras, *ori* - 折 - que significa dobrar e *kami* - 紙 - que significa papel. Sendo assim, a palavra origami diz da arte de dobrar papel que, no Brasil, é conhecida como dobradura. A história do Origami é controversa e não há consenso sobre ela dentre os especialistas, pois, como salientam Hook e Paul (2013, p. 21, tradução nossa), “é frequentemente debatido de onde se originou o origami. Isso se deve ao fato de que o papel é muito difícil de preservar, deixando os arqueólogos com poucas

¹¹ Podemos dizer que o ângulo $\widehat{F\hat{I}H}$ é reto, pois traçando o segmento \overline{GI} teremos os triângulos ΔFGI e ΔGHI . Como $\overline{IK} \equiv \overline{HK}$, raio da circunferência, então o triângulo ΔHIK é isósceles logo $\widehat{I\hat{H}K} \equiv \widehat{H\hat{I}K}$. Analogamente, com o triângulo ΔFIK , $\overline{IK} \equiv \overline{FK}$, raio da circunferência temos $\widehat{F\hat{I}K} \equiv \widehat{I\hat{F}K}$. Considerando o triângulo ΔFHI sabemos que $\widehat{I\hat{F}H} + \widehat{F\hat{H}I} + \widehat{G\hat{I}H} + \widehat{G\hat{I}F} = 180^\circ$, portanto $\widehat{G\hat{I}H} + \widehat{G\hat{I}F} = 90^\circ$.

evidências sobre o passado”¹². Em meio às inúmeras suposições, acredita-se que a arte do origami tenha surgido juntamente com a criação do papel. Krier (2007, p.1, tradução nossa) explica que “o Origami originou-se na China, onde era conhecido como Zhézhǐ (折纸). Mais tarde, tornou-se popular no Japão e agora é considerada uma arte japonesa”¹³. Destaca-se que na época de seu surgimento, o papel não era um material acessível, tornando a arte do origami restrita a ocasiões cerimoniais. Conforme destaca Graciolli (2017), o origamista Akira Yoshizawa (1911 - 2005) foi um dos grandes responsáveis pela difusão da arte japonesa pelo mundo, e isso proporcionou diferentes olhares para a arte milenar japonesa como, por exemplo, estar presente na arquitetura, na matemática, na medicina dentre outras áreas.

Relativamente à matemática, que nos interessa neste texto, em 1991 o matemático japonês Humiaki Huzita (1924 - 2005), ao estudar as dobras realizadas para construir um origami, descreveu seis padrões que ficaram conhecidos como os axiomas de Huzita. Em 2001, o matemático japonês Koshiro Hatori descreveu uma dobra que não estava no universo de dobras de Huzita, motivando a criação do sétimo axioma dos Origamis conhecidos, atualmente, como axiomas de Huzita-Hatori. A descoberta de mais um axioma fez com que os matemáticos se perguntassem se haviam outros axiomas para além dos sete já enunciados, conforme afirma o físico estadunidense Robert Lang (2015). No entanto, em 2003, como explica Monteiro (2008), Lang comprova que os sete axiomas propostos por Huzita-Hatori englobam todas as dobras possíveis de um origami planar. Cabe destacar, que apesar da sistematização das dobras possíveis ter sido descrita inicialmente por Huzita em 1991, existem indícios da aplicação dos origamis a problemas matemáticos anteriores a essa data. Rodrigues (2015, p. 43) salienta que,

A prova de que o Origami já era relacionado aos conceitos matemáticos antes mesmo dos anos 80, é que em 1721 foi lançado um livro japonês chamado “Wakoku Chiyekurabe” (Competições matemáticas) de Kan Chu Sen. Este livro tinha como principal característica a relação de dobras e cortes envolvendo problemas que forçavam o leitor a desenvolver seu raciocínio lógico.

Um fato que chama a atenção nos Origamis e tem sido tema de diversos trabalhos acadêmicos é a possibilidade de, pela Geometria dos Origamis, se representar grandezas envolvidas em problemas como o da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, conforme destacaremos, mais especificamente, o problema da duplicação do cubo.

¹²“It is often debated as to where origami originated. This is due to the fact that paper is very difficult to preserve, leaving archeologists with little evidence from the past” (HOOK; PAUL, 2013, p. 21).

¹³ “Origami originated in China where it was known as Zhe Zhi. It later became popular in Japan, and is now considered a Japanese art.” (KRIER, 2007, p. 1)

O problema da duplicação

O problema da duplicação do cubo é um dos três problemas clássicos da Geometria e consiste em, usando régua e compasso não graduados, encontrar a aresta de um cubo que possua o dobro do volume do cubo formado por uma aresta dada. Esse problema, conforme destaca Roque (2012, p. 155 – 156), está associado a uma lenda.

[...] em 427 a.E.C. Péricles teria morrido de peste juntamente com um quarto da população de Atenas. Consternados, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo, em Delos, para saber como enfrentar a doença. A resposta foi que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado. Prontamente, as dimensões do altar foram multiplicadas por 2, mas isso não afastou a peste. O volume havia sido multiplicado por 8 e não por 2.

Há vários modos de, na atualidade, se pensar tal problema. Se consideramos a perspectiva da álgebra, partindo de um cubo cuja aresta corresponda a medida 'a', temos que a medida da aresta desejada, ou seja, a aresta para que o volume do cubo seja duplicado, corresponderá a ' $a\sqrt[3]{2}$ ', donde vem que:

$$\begin{aligned} \text{Volume}_{\text{cubo}} &= \text{Aresta}^3 \\ V_1 &= a^3 \\ V_2 &= (a\sqrt[3]{2})^3 \rightarrow 2a^3 = 2V_1 \end{aligned}$$

Esse problema, conforme Stewart (2015), parece ter motivado os gregos a buscarem por uma construção exata. Entretanto, tal construção é impossível de ser realizada com precisão usando os instrumentos euclidianos, ao menos no que expõe Wantzel (1837). Para compreender o que leva a tal impossibilidade vamos considerar o problema a partir de uma perspectiva euclidiana.

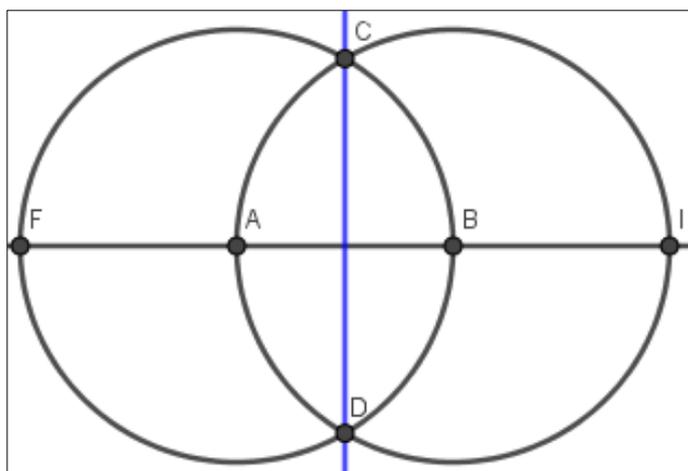
Perspectiva Euclidiana

O problema da duplicação consiste em encontrar, usando régua e compasso não graduados, a grandeza $\sqrt[3]{2}$. Se isso fosse possível, ampliar o segmento $\sqrt[3]{2}$ pode ser facilmente construtível usando transporte de medidas com compasso. No entanto, como destacaremos, essa grandeza não pode ser construída dessa forma. Na Geometria Euclidiana, todas as construções seguem uma sequência de etapas que são limitadas aos seguintes movimentos: “Unir dois pontos por uma reta; achar o ponto de interseção de duas retas; desenhar um círculo com um raio dado e com centro em um ponto dado; encontrar os pontos de interseção de um círculo com um outro círculo ou com uma reta” (LUGLI, 2014, p. 22, formatação adaptada).

Esse conjunto de movimentos possíveis com os instrumentos euclidianos propicia a construção de grandezas que são denominadas construtíveis. Segundo Freitas (2014),

partindo de dois pontos construtíveis, tais como $A = (0,0)$ e $B = (1,0)$, é possível encontrar outros quatro pontos construtíveis com os movimentos citados. Conforme a figura 4, partindo dos pontos A e B, podemos construir um segmento \overline{AB} , em seguida construir uma circunferência com centro em A e raio \overline{AB} . Analogamente é possível construir uma circunferência de mesmo raio, com centro no ponto B. O encontro das circunferências definem dois pontos C e D que são construtíveis, pois foram “encontrados” pelas construções feitas com régua e compasso. Em seguida, construindo pelos pontos C e D uma reta que passa por ambos (reta em azul, na figura 4, é possível construir outra reta que é perpendicular a reta que passa pelos pontos C e D. Essa reta intercepta as duas circunferências c e d em quatro pontos (desconsiderando os pontos do segmento AB) temos os pontos I e F.

Figura 4: Alguns pontos construtíveis



Fonte: os autores

Sendo assim, partindo de $A = (0,0)$ e $B = (1,0)$ construímos os quatro pontos:

$$C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); I = (2,0); F = (-1,0).$$

Partindo desses pontos que foram construídos, inúmeros outros também podem ser construídos, bastando recorrer aos movimentos que os instrumentos euclidianos possibilitam ao geômetra, adiciona-se que como expresso por René Descartes em *A Geometria*, a multiplicação e a divisão podem ser expressas por relações construtivas. Destacam, Damin e Merli (2017) que as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão), quando partindo de números construtíveis, retornam grandezas construtíveis. No entanto, as grandezas construtíveis não se restringem somente aos números racionais positivos (\mathbb{Q}^+). As construções geométricas permitem, inclusive, a extração de raiz quadrada de um segmento dado. Conforme Costa (2013, p. 24),

[...] Dizemos que um número real x é construtível, ou seja, $x \in \mathbb{C}$, se $x = 0$ ou se for possível construir, com régua e compasso, através de um número finito desses procedimentos, um segmento de comprimento igual a $|x|$, a partir de um segmento de reta tomado como a unidade.

Cabe destacar, que mesmo compreendendo que existem uma infinidade de grandezas construtíveis, ainda não conseguimos identificar se uma grandeza específica é construtível ou não e, para compreender se o problema da duplicação é solucionável com régua e compasso, é necessário identificar se $\sqrt[3]{2}$ é construtivo. Conforme Ripoll et al (2002), na matemática atual, além das divisões entre os conjuntos numéricos, há também a distinção entre os números chamados transcendentos e os chamados algébricos.

A distinção entre ambos consiste em que os algébricos podem ser escritos como solução de uma equação algébrica com coeficientes pertencentes ao conjunto dos inteiros, enquanto que os transcendentos não. Ao analisar $\sqrt{2}$, concluímos que se trata de uma grandeza algébrica, pois é solução da equação $x^2 - 2 = 0$. E, além disso, $\sqrt{2}$ é construtivo, como já vimos anteriormente. Segundo Ripoll et al (2002), “qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um algébrico de grau 1, ou 2, ou 4, ou 8, ..., isto é, um número algébrico de grau igual a uma potência de 2”. Ao voltarmos ao problema da duplicação do cubo, entende-se que o valor $\sqrt[3]{2}$ é um número algébrico, pois é solução da equação $x^3 - 2 = 0$, mas não é construtivo, pois é de grau 3 e se encontra em forma reduzida¹⁴. Sendo assim, podemos considerar que os instrumentos euclidianos são inadequados para a construção dessa grandeza. Porém, apesar dos instrumentos euclidianos não permitirem a construção e, conseqüentemente não possibilitar a solução do problema com régua e compasso, a Geometria do Origami nos dá uma possibilidade de construí-la.

Perspectiva do Origami

Conforme Rodrigues (2015), os cinco primeiros axiomas da Geometria do Origami garantem as mesmas operações que podem ser efetuadas por meio dos instrumentos euclidianos, sendo que o sexto axioma equivale a resolver uma equação cúbica. Para compreender essa equivalência entre o axioma 6 (O6) e a resolução de uma equação cúbica, vamos começar explorando o axioma 5 (O5), conforme abordam Monteiro (2008) e Rodrigues (2015) em seus respectivos trabalhos. O axioma 5 (O5), de acordo com Monteiro (2008), pode ser enunciado da seguinte forma: dados dois pontos, A e B, e uma reta, r , se a

¹⁴ c.f (LEE, 2017, p. 25).

distância de A a B for igual ou superior à distância de B a r , há uma dobra que faz incidir A em r e que passa por B.

Suponhamos A e B, distintos, sendo $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ e dada a equação da reta $r: y = ax + b$. Construiremos uma circunferência auxiliar de raio \overline{AB} , com centro em B, cuja equação seja dada por $c: (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = r^2$. A intenção é encontrar a interseção da circunferência c e da reta r .

Portanto:

$$\begin{cases} y = ax + b; \\ (y - y_B)^2 + (x - x_B)^2 = r^2, \text{ com } a, b, x_B, y_B, r \text{ constantes.} \end{cases}$$

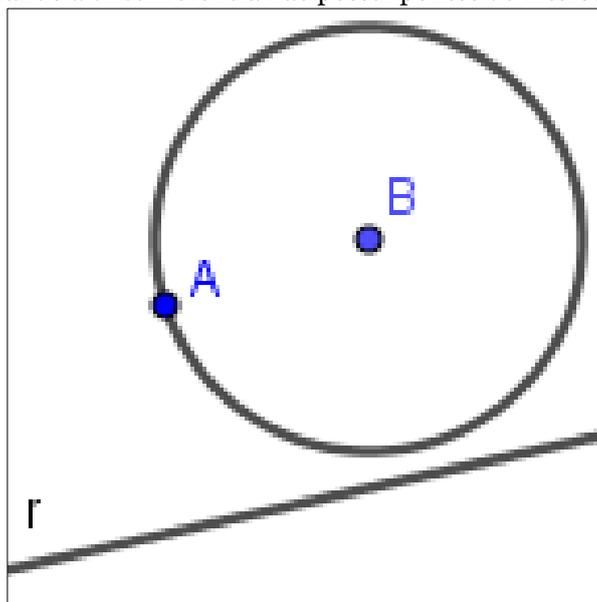
$$\rightarrow (ax + b - y_B)^2 + (x - x_B)^2 = r^2$$

$$\rightarrow (a^2x^2 + 2axb - 2axy_B - 2by_B + b^2 + y_B^2) + (x^2 - 2xx_B + x_B^2) - r^2 = 0$$

$$\rightarrow (a^2 + 1)x^2 + (2ab - 2ay_B - 2x_B)x + (-2by_B + y_B^2 + x_B^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Podemos notar que a equação acima é de segundo grau o que permite que haja uma, duas ou nenhuma resposta que a satisfaça. Geometricamente, não haverá solução quando o comprimento do raio for menor do que a distância do ponto B até a reta r , isto é, quando a distância de A até B for menor do que a distância de B até r . Nesse caso não há dobra alguma que faça o ponto A se sobrepôr à reta r , passando por B, assim como mostra-se na figura 5.

Figura 5: O5 quando a circunferência não possui pontos de intersecção com a reta.

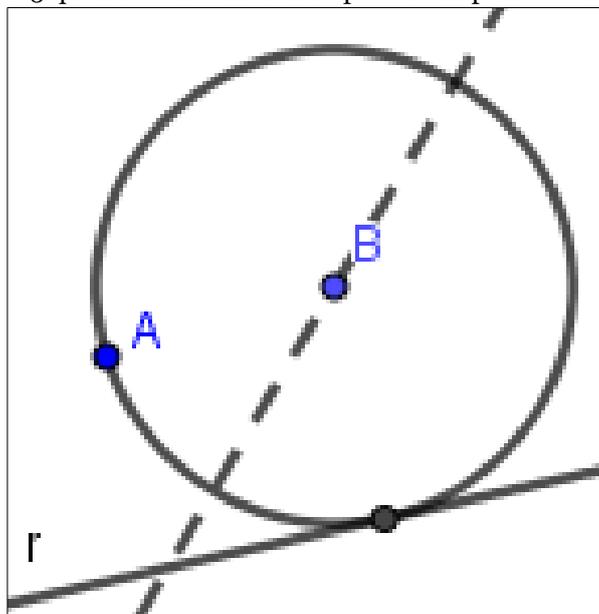


Fonte: os autores.

Caso o comprimento do raio seja de mesma medida que a distância entre o ponto B e a reta r , a circunferência tangenciará a reta r e haverá uma única solução para a equação

acima, o que significa afirmar que existe uma dobra possível, representada pela linha tracejada na figura 6.

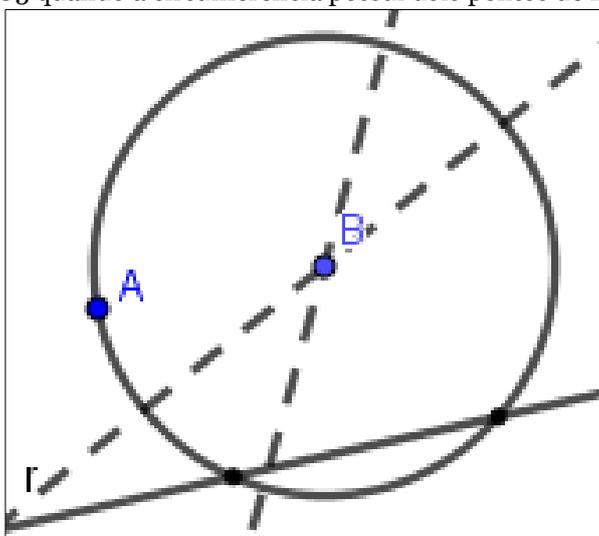
Figura 6: O5 quando a circunferência possui um ponto de intersecção



Fonte: os autores

No caso de a medida do raio ser maior do que a distância entre o ponto B até a reta r , a circunferência vai interceptar a reta em dois pontos, o que implica a possibilidade de duas dobras que satisfaçam O5.

Figura 7: O5 quando a circunferência possui dois pontos de intersecção.

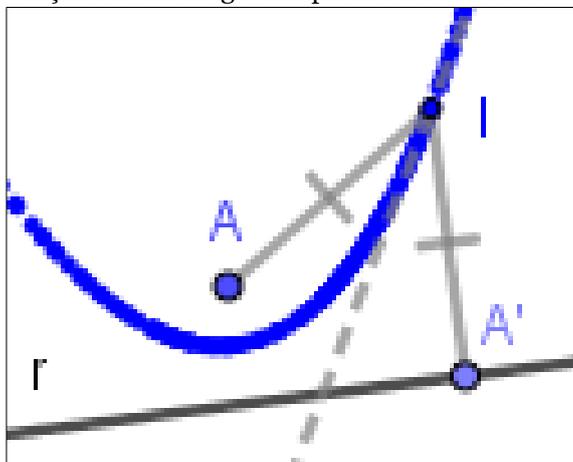


Fonte: os autores.

O procedimento proposto pelo O5 corresponde a encontrar, se existir, retas tangentes (dobras) a parábola de foco A e reta diretriz r . Como expõe Krier (2007), este

axioma permite que, independente do ponto B, encontremos uma dobra que possui um ponto equidistante do ponto A e da reta r . Se chamarmos este ponto sobre a dobra de I, figura 8, teremos uma parábola como o lugar geométrico desses pontos. A parábola, por definição, é o conjunto dos pontos que equidistam de uma reta diretriz e de um ponto fixo. Assim, o ponto I pertence a uma parábola e também a reta representada pela dobra.

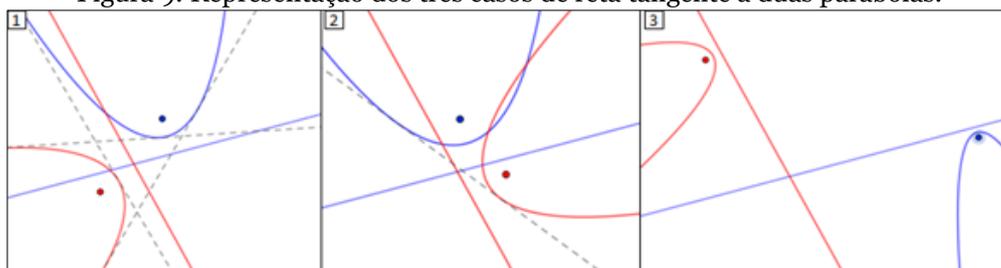
Figura 8: Representação da reta tangente a parábola com foco em A e reta diretriz r .



Fonte: os autores.

Já o axioma 6 (O6), que garante a solução do problema da duplicação do cubo, é enunciado, por Monteiro (2008), da seguinte forma: dados dois pontos, A e B, e duas retas, r e s , se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma dobra que faz incidir A em r e B em s . Ao fazer com que, por meio de dobra, o ponto A fique sobre a reta r e, ao mesmo tempo, B esteja na reta s , cria-se uma dobra que é tangente as duas parábolas simultaneamente. Assim, como por O5 podemos ter retas tangentes a parábola de foco A e reta diretriz r , O6 nos garante uma reta tangente, tendo as parábolas com foco em A e reta diretriz r e com foco em B e reta diretriz em s , respectivamente, conforme mostra a figura 9.

Figura 9: Representação dos três casos de reta tangente a duas parábolas.



Fonte: os autores.

Esse procedimento equivale a resolver uma equação de terceiro grau. Para mostrar tal associação entre uma reta tangente a duas parábolas e a resolução de uma equação cúbica, partiremos do trabalho de Lee (2017). Tomemos as seguintes parábolas

$$\begin{cases} \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx; \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}, \text{ com } a, b \text{ constantes.}$$

Suponhamos que $A = (x_A, y_A)$ pertença a primeira parábola e $B = (x_B, y_B)$ pertença a segunda. Como desejamos encontrar a reta tangente a ambas parábolas, calcularemos a derivada da função, pois ela nos fornece o coeficiente angular da reta tangente. Sendo assim, as derivadas implícitas das funções descritas acima.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{b}{y - \frac{a}{2}}; \\ \frac{dy}{dx} = x \end{cases}$$

E com as derivadas nos pontos A e B, respectivamente.

$$\frac{dy}{dx}(x_A, y_A) = \frac{b}{y_A - \frac{a}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}(x_B, y_B) = x_B$$

Nomearemos o coeficiente angular das retas tangentes por μ . Salienta-se que, como as retas tangentes devem ser tangentes a ambas as parábolas, os coeficientes angulares são comuns, ou seja, μ é comum. Sendo assim,

$$\mu = x_B = \frac{b}{y_A - \frac{a}{2}}$$

Entretanto, para definirmos o valor do coeficiente angular, ainda nos falta encontrar os respectivos valores de x_A e y_B . Para isso, usaremos as funções das parábolas.

$$A(x_A, y_A) \rightarrow \left(y_A - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx_A \rightarrow x_A = \frac{\left(y_A - \frac{a}{2}\right)^2}{2b}, \text{ mas } y_A = \frac{b}{\mu} + \frac{a}{2}, \text{ substituindo temos:}$$

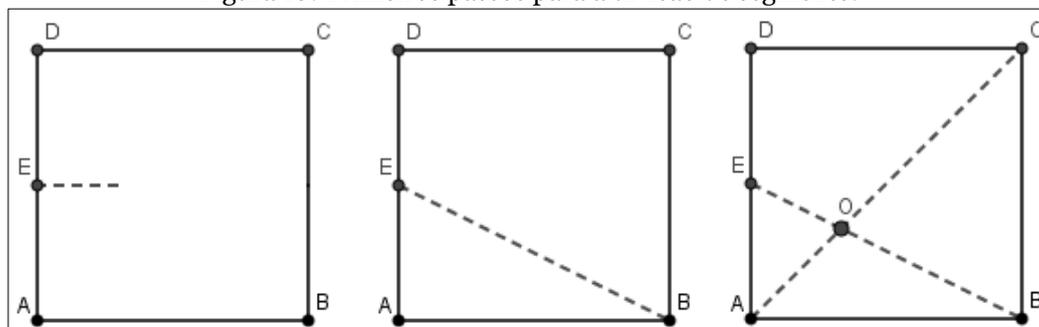
$$x_A = \frac{b}{2\mu^2}.$$

$$B(x_B, y_B) \rightarrow y_B = \frac{1}{2}(x_B)^2, \text{ como } \mu = x_B, \text{ substituindo temos: } y_B = \frac{1}{2}\mu^2.$$

Como μ é coeficiente angular, temos que $\mu = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{\mu^2}{2} - \frac{b}{\mu} - \frac{a}{2}}{\mu - \frac{b}{2\mu^2}}$, operando com os termos é possível chegar na equação $\mu^3 + a\mu + b = 0$. Ou seja, o O6 permite soluções para equações cúbicas e como o problema da duplicação do cubo consiste em resolver a equação $x^3 - 2 = 0$, podemos afirmar que a Geometria do Origami possibilita a resolução do problema da duplicação do cubo sem a restrição dos instrumentos euclidianos.

Sendo assim, para encontrarmos a $\sqrt[3]{2}$ usando Origami, precisamos de uma folha de papel em formato quadrado e dividir um dos segmentos do lado do quadrado em três segmentos congruentes. Para isso, vamos considerar o quadrado ABCD, figura 10. Em seguida marque com uma dobra um ponto E na metade do segmento \overline{AD} . Marque com uma dobra o segmento que contenha os pontos E e B. Marque, com uma dobra, a diagonal \overline{AC} do quadrado. Nomeie de O o ponto de intersecção entre as dobras anteriores.

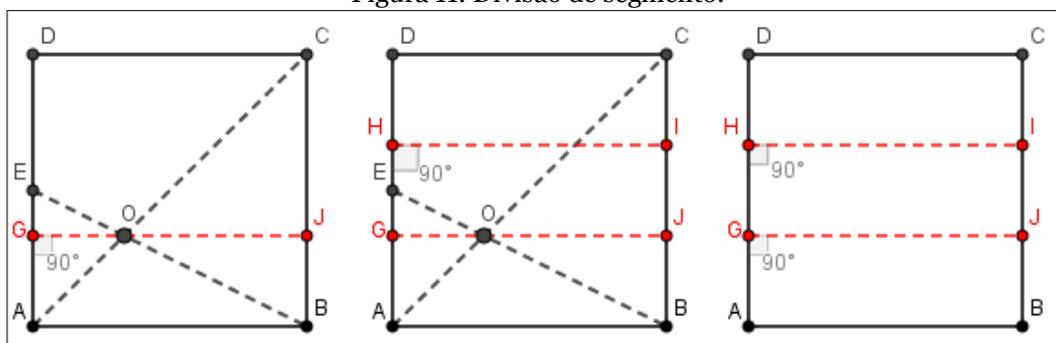
Figura 10: Primeiros passos para a divisão de segmento.



Fonte: os autores.

Se dobrarmos um segmento perpendicular ao lado do quadrado e que passe por O, figura 11, teremos como pontos de intersecção da dobra com o lado do quadrado os pontos G e J. Dizemos que AG vale um terço do lado do quadrado e se dividirmos os segmentos GD e FC ao meio, teremos os pontos H e I. Com isso, $\overline{CD} // \overline{HI} // \overline{GJ} // \overline{AB}$ e $\overline{AG} \equiv \overline{GH} \equiv \overline{HD} \equiv \overline{BJ} \equiv \overline{JI} \equiv \overline{JC} = \frac{1}{3}$ do lado do quadrado. Demonstração da divisão do segmento em três partes iguais pode ser encontrada em Monteiro (2008, p. 23).

Figura 11: Divisão de segmento.

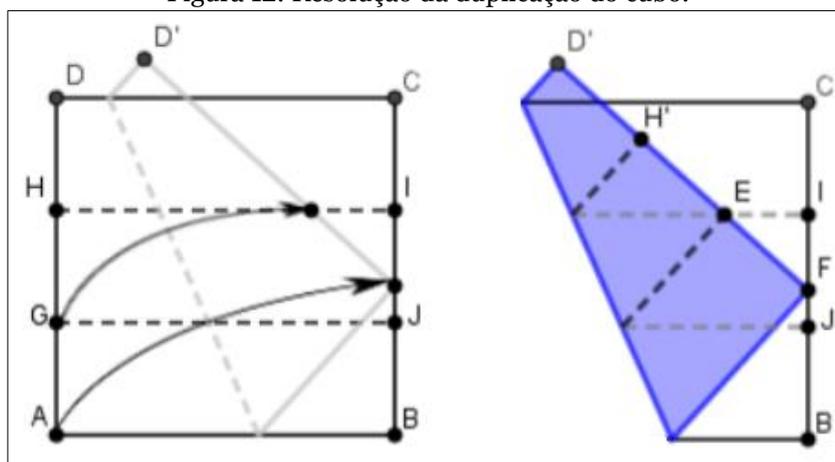


Fonte: os autores.

Para a última dobra é preciso que o ponto G esteja sobre o segmento \overline{HI} e que o ponto A esteja sobre o segmento \overline{CB} , simultaneamente, gerando os pontos E e F, respectivamente, figura 12. Está dobra é possível pelo O6. Com está dobra e considerando que todos os passos

tenham sido devidamente executados, podemos dizer que a razão entre o segmento \overline{CF} e \overline{FB} é igual $\sqrt[3]{2}$.

Figura 12: Resolução da duplicação do cubo.



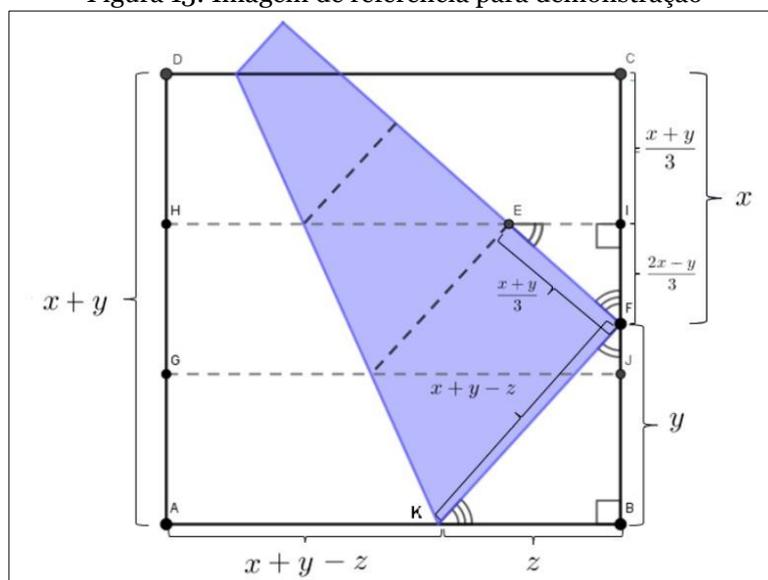
Fonte: os autores.

Para justificar essa afirmação recorreremos aos conceitos apresentados na obra *A Geometria* (1637).

Perspectiva Analítica

Como disse Descartes na introdução de *A Geometria* “todos os problemas de Geometria podem facilmente ser reduzidos a termos, tais que para construí-los, nada mais é necessário que o conhecimento do comprimento de algumas linhas retas” (DESCARTES, 2015, p. 12). Para dar continuidade a justificativa da construção, nomearemos os segmentos do seguinte modo:

Figura 13: Imagem de referência para demonstração



Fonte: os autores

Para demonstrarmos que $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ vamos considerar o segmento $\overline{CF} = x$, $\overline{FB} = y$ e $\overline{KB} = z$. Como o segmento $\overline{CB} = \overline{CF} + \overline{FB}$ então $\overline{CB} = x + y$. Como apresentado anteriormente, os segmentos \overline{CI} , \overline{IJ} e \overline{JB} dividem o lado do quadrado em três partes iguais, isto é, $\overline{CI} \equiv \overline{IJ} \equiv \overline{JB} = \frac{x+y}{3}$ (I). Como $\overline{CF} = \overline{CI} + \overline{IF}$, então $\overline{IF} = x - \frac{x+y}{3} \rightarrow \overline{IF} = \frac{2x-y}{3}$ (II). Como dobramos de forma que o ponto A esteja sobre \overline{CB} , gerando o ponto F, e o ponto G sobre \overline{HI} , gerando o ponto E, a medida do segmento \overline{AG} é a mesma do segmento \overline{EF} , ou seja, $\overline{EF} = \frac{x+y}{3}$ (III), também pela dobra, o ângulo $\widehat{EFK} = \widehat{GAB} = 90^\circ$ (IV) e o segmento $\overline{KF} = \overline{AK}$. Como $\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB}$, sendo \overline{AB} lado do quadrado e $\overline{KB} = z$, então $\overline{KF} \equiv \overline{AK} = x + y - z$ (V). Mas, se observarmos o ΔKBF , notamos que ele é retângulo, pois o ângulo $\widehat{KBF} = 90^\circ$ é reto, então pelo Teorema de Pitágoras concluímos que $\overline{KB} = z = \frac{x^2+2xy}{2x+2y}$ (VI). O ângulo $\widehat{KFB} = \widehat{FEI}$, uma vez que, $\widehat{KFB} + \widehat{KFE} + \widehat{EFI} = \widehat{BFC} = 180^\circ$, ângulo raso, e também que $\widehat{EFI} + \widehat{EIF} + \widehat{FEI} = 180^\circ$, soma dos ângulos internos de um triângulo. Portanto, como $\widehat{KFE} = \widehat{FIE} = 90^\circ$ e \widehat{EFI} é comum temos que $\widehat{KFB} \equiv \widehat{FEI}$ (VII). Se considerarmos os triângulos ΔFIE e ΔKBF , pelo caso Ângulo Ângulo eles são semelhantes, pois o ângulo $\widehat{FIE} \equiv \widehat{KBF} = 90^\circ$ e pela informação (VII) $\widehat{KFB} \equiv \widehat{FEI}$. Dizer que os triângulos são semelhantes implica dizer que $\frac{\overline{EF}}{\overline{KF}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{IF}}{\overline{KB}} = k$. Considerando $\frac{\overline{EF}}{\overline{KF}} = \frac{\overline{IF}}{\overline{KB}}$ e as informações (III), (V) e (II) teremos $\frac{\frac{x+y}{3}}{x+y-z} = \frac{\frac{2x-y}{3}}{z}$ (VIII). Mas pela informação (VI) $z = \frac{x^2+2xy}{2x+2y}$, então substituindo (VI) em (VIII) teremos,

$$\frac{\frac{x+y}{3}}{x+y-\left(\frac{x^2+2xy}{2x+2y}\right)} = \frac{\frac{2x-y}{3}}{\frac{x^2+2xy}{2x+2y}}$$

Ao desenvolver a expressão obteremos que $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ e, se considerarmos $y = 1$, teremos $x = \sqrt[3]{2}$, como queríamos demonstrar.

O problema da duplicação e as diversas perspectivas Geométricas

Diante do exposto e buscando investigar as diferentes perspectivas do problema da duplicação do volume do cubo emergentes na disciplina “Fundamentos de Geometria”, consideramos que, conforme salienta Husserl (1970) a Geometria, apesar de ser uma ciência de milênios, é uma ciência que se encontra em desenvolvimento vivo. Sendo assim, ao conhecermos os modos pelos quais a Geometria se apresenta, por meio da sistematização axiomática e dedutiva euclidiana, pela algebrização cartesiana, pelas dobras orientais ou qualquer outro modo, eles são abertos à interpretação, pois pertencem a um mundo comum que pode ser percebido de diferentes maneiras. Sendo assim, a parábola construída com régua

e compasso é parábola tanto quanto a desenhada a partir das dobras. Mesmo que a Geometria do Origami se utilize de dobras para dar forma à parábola e a Geometria Euclidiana a construa com régua e compasso, vê-se algo comum que é a parábola, pois as Geometrias tratam dos mesmos objetos. Pode-se perceber que, o diferencial são seus procedimentos (modos geométricos), ou seja, a racionalidade envolvida para realizar uma construção ou dobra. Essa racionalidade permite um pensamento geométrico particular, denotando a particularidade de cada modo geométrico.

Cabe destacar, que não se trata de buscar uma classificação entre as Geometrias, mas de ver que cada uma delas está ligada à racionalidade de determinada época e a determinado espaço, sem se restringirem a esse espaço e época. Isso porque, como destaca Husserl, são objetos passíveis de terem reativados o seu sentido original. Foi assim realizável por Descartes que, partindo de dois saberes consolidados, estabelece um modo geométrico que “aproveitaria o melhor da Análise Geométrica e da Álgebra”¹⁵. É, também, assim na atualidade, pois, a partir do momento que uma construção geométrica é feita, ela integra essa ciência em desenvolvimento vivo que constitui o mundo cultural que será carregado como tradição.

Ciência designa, portanto, a ideia de uma infinidade de tarefas das quais, em cada tempo, uma parte delas está já acabada e é conservada como uma validade persistente. Esta parte forma, ao mesmo tempo, o fundo de premissas para um horizonte infinito de tarefas, enquanto unidade da tarefa onienlobante (HUSSERL, 2012, p. 256 apud TEZA, 2015, p. 124 – 125).

O problema da duplicação do volume do cubo, segundo interpretamos, expõe essa característica da Geometria ou da ciência geométrica que permite a reativação do sentido mesmo se estando em outra época, há a possibilidade de reativar o sentido de cada um desses modos levando-nos a pensar sobre as limitações e as possibilidades de cada modo geométrico aqui tratado (Geometria Euclidiana, Geometria Analítica e Geometria do Origami). No entanto, consideramos que cabe ao indivíduo o cuidado e a atitude reflexiva para não se encerrar em uma reativação ingênua, sem questionar as potencialidades geométricas de cada um desses modos, mas aceitando-os de modo passivo, sem qualquer inquérito. Se assim o for, não tem propriamente uma reativação de sentido, mas mera aceitação do que, pela cultura e pela tradição é transmitido para ser reproduzido.

Referências

ÁVILA, G. **Euclides, geometria e fundamentos**. 2001. Disponível em:

¹⁵ (DESCARTES, 2017, p. 39).

- <<http://rpm.org.br/cdrpm/45/1.htm>>. Acesso em: 9 jul. 2019.
- BATTISTI, C. A. O método de análise cartesiano e o seu fundamento. **Scientiae studia**, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 571 – 596, 2010.
- BICUDO, I. Platão e a matemática. **Letras clássicas**, São Paulo, n. 2, p. 301 – 315, 1998.
- BICUDO, M. A. V. Sobre a fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (orgs). **Pesquisa qualitativa em educação**. Piracicaba: Unimep, p. 15 – 22, 1994.
- BICUDO, M. A. V. Sobre história e historicidade em Edmund Husserl. **Cadernos da EMARF**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 1, p. 1 – 174, 2016.
- CONEGLIAN, S. M. G.; SANTOS, C. A.; MELO, J. J. P. Reflexões sobre a vida de Descartes e o plano cartesiano. In: Simpósio Nacional de Educação; Semana de pedagogia, Cascavel, 2010. **Anais...** Cascavel: UEM, 2010, p. 1 – 13.
- CORRÊA, B. M. **A introdução à arte analítica de François Viète**: comentários e tradução. 2009. 131f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- COSTA, V. C. da. **Números construtíveis**. 2013. 51 f. Dissertação (Mestrado em Matemática – PROFMAT) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.
- D’ALEMBERT, J. le R. Geometria (ordem enciclopédica, entendimento, razão, filosofia ou ciência, ciência da natureza, matemáticas, matemáticas puras, geometria). In: DIDEROT, D.; D’ALEMBERT, J. Le R. **Enciclopédia**, ou Dicionário raziado das ciências, das artes e dos ofícios. Vol. 3: Ciência da Natureza/ D. Diderot, J. le R. D’Alembert; organização e tradução P. P. Pimenta, M. das G. de Souza, São Paulo: Editora Unesp, 2015.
- DAMIN, V. S; MERLI, R. F. As relações entre a duplicação do cubo e os números construtíveis. In: Semana da matemática UTFPR, 5, 2017, Toledo, PR. **Anais...** Toledo: Curso de licenciatura em matemática da UTFPR, 2017. p. 35 – 46.
- DESCARTES, R. **A geometria**. Tradução, Introdução e Notas R. A. Sapunaru. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- DESCARTES, R. **O discurso do método** tradução J. C. Costa, Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2017.
- DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, p. 55 – 67, set. 2002.
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de I. Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- FERREIRA, A. V. O estágio curricular e a fenomenologia de Edmund Husserl: práticas investigativas na formação docente inicial. In: Congresso nacional de educação, 12.;

- Seminário internacional de representação sociais, subjetividade e educação, 3. Curitiba, 2015. **Anais...** Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/18343_9027.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2019.
- FØLLESDAL, D. **El concepto de lebenswelt em Husserl**. Tradução de S. S. Benítez. Disponível em: <https://www2.uned.es/dpto_fim/InvFen/InvFenOO/Boletino4/03_FOLLESDAL.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2019.
- FREITAS, J. M. de. **Os três problemas clássicos da Matemática grega**. 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2014.
- GRACIOLLI, C. Y. L. F. **Possibilidades de trabalhar conteúdos matemáticos com origamis**. 2017. 41 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.
- HOOK, N.; PAUL, K. Beyond the Fold: the math, history, and technology behind origami. **Ohio journal of school Mathematics**, Ohio, v. 27, p. 21 – 26, 2013.
- HUSSERL, E. **A origem da geometria**. Tradução M.A.V. Bicudo. E&PQ – Sociedade de estudos e pesquisa qualitativos, São Paulo, 2006, p. 1 – 34.
- KRIER, J. L. **Mathematics and origami: the ancient arts unite**. 2007. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/1c1a/397eb31a69dfd2671cb61326491115b779do.pdf>>. Acesso em: 9 jul. 2019.
- LANG, R. J. **Huzita-Justin axioms**. Disponível em: <<https://langorigami.com/article/huzita-justin-axioms/>>. Acesso em: 9 jul. 2019.
- LEE, H. Y. **Origami-constructible numbers**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado em artes) – Universidade da Georgia, Athens, 2017.
- LE GOFF, J. **A história deve ser dividida em pedaços?** Tradução N. A. Bonatti, São Paulo: Editora Unesp, 2015.
- LUGLI, R. **Não precisamos de régua, sim de Álgebra e compasso**. 2014. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.
- MONTEIRO, L. C. N. **Orígamí: história de um geometria axiomática**. 2008. 111 f. Tese (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, Lisboa, 2008.
- NOBRE, S. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência e**

- Educação**, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.
- PINTO, M. G. R. Descartes e o método filosófico aplicado à Matemática. **Enciclopédia**, Pelotas, v. 6, p. 56 – 65, verão 2016.
- RESTREPO, D. H. Husserl y el mundo de la vida. **Franciscanum**, Bogotá, n. 153, v. 52, p. 247 – 274, 2010.
- RIPOLL et al. Números irracionais, transcendentos e algébricos: a existência e a densidade dos números. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 4, n. 1, p. 85 – 89, jan. /jun. 2002.
- ROCHA, C. E. da S. **O supra-sensível em Aristóteles**. 2010. Disponível em: <http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio_resumo2010/relatorios/ctch/fil/FIL-Carlos%20Eduardo%20da%20Silva%20Rocha.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2019.
- RODRIGUES, B. M. B. **O estudo das cônicas através do Origami**. 2015. 132 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- ROJAS, E. C.; LLANOS, V. C.; OTERO, M. R. La génesis histórica de la Geometría Analítica y la enseñanza en la escuela secundaria. **Número**, v. 93, p. 93 – 110, nov. 2016.
- ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**, Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SANTANA, L. M. **Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso**. 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- SAPUNARU, R. A. **Introdução**. In: DESCARTES, R. **A Geometria**. Tradução, Introdução e Notas R. A. Sapunaru. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- STEWART, I. **Galois Theory**. 4^a ed. New York: Chapman and Hall CRC, 2015. 344f.
- TENÓRIO, R. M. Com um olho na quarta dimensão. **Sitientibus**, Feira de Santana, n. 12, p. 73 – 75, 1994.
- TEZA, R. de S. O significado de “objetivismo” em Husserl: caminhos para descobrimento e encobrimento. **Kínesis**, Marília, v. 7, n. 15, p. 120 – 134, dez. 2015.
- WANTZEL, P. L. Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. **Journal de mathématiques pure et appliquées**, n. 1, v. 2, p. 366 – 372, 1837. Disponível em: <http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1837_1_2_A31_0.pdf>. Acesso em: 28 out. 2020.

Biografia Resumida

Rodolfo Masaichi Shintani: Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), campus Guaratinguetá. Mestrando em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), campus Rio Claro. Bolsista CNPq.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4323112267142020>

Contato: rodolfo.shintani@gmail.com

Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli: Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), campus Guaratinguetá. Mestranda em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), campus Rio Claro. Bolsista Capes.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5671749922031163>

Contato: carolinayumigraciolli@gmail.com