Uma situação didática sobre ângulos para o 6º ano: o GeoGebra auxiliando da construção da definição à classificação

Joaby de Oliveira Silva

Gilson Bispo de Jesus

Resumo

É cada vez mais evidente a necessidade de ampliar a participação dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Assim, a atividade sobre ângulos apresentada aqui colabora com esse processo. Desse modo, este artigo objetiva apresentar a análise de uma atividade desenvolvida para a construção da definição de ângulo por parte de alunos de 6º ano. Os resultados da pesquisa foram obtidos por meio de uma análise institucional de documentos oficiais e do livro didático, da análise *a priori* da atividade elaborada e da análise *a posteriori* da implementação da atividade. A partir disso, constatamos que a definição construída pelos alunos diverge da apresentada no livro didático. Além disso, o GeoGebra propiciou aos alunos diferentes representações e formas de exploração dos ângulos.

Palavras-chave: Ângulo. GeoGebra. Definição. 6º Ano.

ISSN 2526-2882

A didactic situation on angles for the 6th: GeoGebra aiding from construction of the definition to the classification

Joaby de Oliveira Silva

Gilson Bispo de Jesus

Abstract

It is increasingly evident the need to expand student participation in the teaching-learning process, thereby, the angle activity presented here contributes to this. Therefore, this article aims to present the analysis of an activity developed to construct the definition of angle by students for 6th. The research result was obtained through an institutional analysis of official documents and a textbook, of the a priori analysis of the elaborated activity and a posteriori analysis of the implementation of the activity. From this, we could observe that the definition constructed by the students is different from the one present in the textbook. In addition, GeoGebra provided access to different representations and ways of exploring angles to the students.

Keywords: Angle. GeoGebra. Definition. 6th.

Introdução

A exposição da teoria relativa a um objeto matemático tem sido utilizada como ponto de partida para o ensino da Matemática. Veloso (1998) chama esse procedimento de "definomania", ou seja, a aula é iniciada com a apresentação das definições e teoremas para posteriormente serem aplicados na resolução de exercícios e problemas.

O padrão descrito acima não poupa campo algum da Matemática, e, por partir de noções não definíveis como ponto, reta e plano, o ensino de Geometria é bastante afetado. Assim, este trabalho está posto para apresentar a análise de uma atividade desenvolvida para a construção da definição de ângulo por parte de alunos de 6º ano do Ensino Fundamental.

A atividade, que será analisada no decorrer deste texto, compõe uma sequência didática elaborada durante uma pesquisa de mestrado que buscava analisar o processo de construção da definição de polígono mediada pelo uso do software GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental. A temática desta pesquisa tangencia dois pontos críticos do ensino de ângulos: a definição e a representação.

No que concerne à definição de ângulos, encontramos duas perspectivas: como região plana delimitada por duas semirretas de mesma origem e como a união de duas semirretas de mesma origem[14]. O livro didático adotado pela instituição de ensino onde a pesquisa foi aplicada definia este objeto matemático conforme a primeira perspectiva. Porém, foi possível perceber que a maioria das situações propostas para os alunos focava majoritariamente um aspecto do ângulo, a sua medida. Ademais, a apresentação da definição pronta e acabada para o aluno logo no início do processo de ensino e aprendizagem pode não ser significativa para ele, corroborando, assim, a não aquisição de conhecimento por parte do aprendiz.

Além disso, via de regra, encontram-se representações prototípicas dos diferentes tipos de ângulos. Por exemplo, o ângulo reto representado por um par de segmentos de retas: um em posição vertical e o outro na horizontal, alinhados com as laterais do livro (ou quadro); o ângulo obtuso sempre exposto com medida entre 90º e 180º. Essas representações prototípicas podem prejudicar os estudantes no reconhecimento desses objetos matemáticos em outros contextos.

Diante desses dois aspectos, o GeoGebra[15], enquanto software de Geometria dinâmica, possui características que podem aportar contribuições tanto para a construção da definição quanto para o acesso a diferentes representações dos tipos de ângulos. Um exemplo de como pode ocorrer essa contribuição é a própria atividade apresentada e analisada neste artigo, a qual foi elaborada e aplicada tendo como base a Teoria das Situações Didáticas e a

[14] Essa definição pode ser encontrada em Barbosa (2012, p. 22).
[15] O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica que recebeu diversos prêmios pelo mundo devido à sua vasta aplicação para o ensino da disciplina. Informações mais detalhadas podem ser acessadas em: <https://www.geogebra.org/about>.

ISSN 2526-2882

Teoria Antropológica do Didático, ambas sintetizadas na seção seguinte. A metodologia utilizada na realização da pesquisa é apresentada após o referencial teórico e é sucedida pelas análises *a priori* e *a posteriori* da atividade e as conclusões desta pesquisa.

Referencial Teórico

Como já apontado, uma das teorias que serviu de base para essa pesquisa foi a Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (2008). Ela é dotada de um conjunto de conceitos pertinentes à análise de fenômenos didáticos que emergem da relação entre três elementos fundamentais ao processo de ensino e aprendizagem: o professor, o aluno e o saber. Assim:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...] o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (Brousseau, 1986, *apud* Freitas, 2008, p. 80).

Para que uma situação didática ocorra tal como está definida, tanto o professor quanto o aluno precisam ter consciência de suas funções no estabelecimento e manutenção dessas relações. Dessa necessidade, surge o conceito de contrato didático, que é essencialmente um conjunto de expectativas que um agente tem para com o outro. Para que este contrato se mantenha em vigor, o professor se compromete a fornecer os meios necessários à aprendizagem e o aluno assume a responsabilidade de resolver um problema proposto. Porém, nem o professor nem o aluno têm como garantir que cumprirão seus deveres acordados.

Em alguns casos, quando o contrato didático é rompido, pode gerar efeitos que podem prejudicar o processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, se o professor, diante das dificuldades de um aluno, passa a fazer perguntas e "dar dicas" ao ponto de praticamente eximir o aluno da responsabilidade de resolver a situação, essa ação docente pode levar ao desaparecimento do conhecimento, o que é chamado por Brousseau (2008) de Efeito Topaze.

Desse modo, esse contrato é, sobretudo, uma relação de confiança que visa ao estabelecimento de um vínculo com o saber. Para que esta relação pessoal entre o aluno e o saber ocorra, o professor necessita convencê-lo a aceitar um problema que não é seu, e que ele não sabe como resolver. Esse processo de convencimento-aceitação é o que Brousseau (2008) denomina devolução da situação didática.

A partir do momento que o aluno aceita resolver o problema, ele atravessa quatro etapas (ou tipos de) de situação; as três primeiras denominadas situações adidáticas e a última denominada situação didática. A primeira etapa é chamada de situação de ação e ocorre quando o aprendiz explora os elementos presentes no meio[16] proposto pelo professor e observa as reações deste. Já a situação de formulação ocorre quando ele começa a estabelecer relações entres as observações das reações do meio que têm potencial de conduzi-lo a solução da situação matemática proposta, ou seja, formula uma resposta. Esses dois primeiros tipos de situação ocorrem em um nível subjetivo, como se fosse uma solução implícita para o problema, que só o aprendiz que agiu e formulou tem acesso.

Outro tipo de situação é a de validação, durante a qual o aluno busca expor e convencer um interlocutor (professor, colega etc.) de que ele tem uma solução e que ela é verdadeira. Embora essa solução seja exposta acompanhada de uma justificação, ela precisa estar em conformidade com as regras do sistema e da instituição de ensino da qual o aluno faz parte. É por meio da situação didática de institucionalização que o professor busca estabelecer a ligação do conhecimento aprendido com outros conhecimentos, corrigindo possíveis equívocos e universalizando o saber (descontextualizando), de modo a colaborar no sentido de que esse saber possa ser evocado para solucionar novas situações distintas do meio do qual emergiu.

É possível constatar que o processo de ensino e aprendizagem desenvolvido na sala de aula está subordinado a requisitos de instituições "externas". E é principalmente na compreensão das influências "externas" que a Teoria Antropológica do Didático (TAD) colabora com esta pesquisa.

Essa teoria observa todo o caminho que o saber percorre desde seu surgimento até o momento em que ele é efetivamente ensinado. Nesse percurso, é possível observar influências de diferentes agentes sociais. Por exemplo, o saber matemático surge a partir de estudos realizados por pessoas que atuam como pesquisadoras no campo da Matemática. No momento em que surge, ele é denominado Saber Sábio (Chevallard, 2000).

Muitas vezes, um objeto desse Saber Sábio emerge de situações que não podem ser reproduzidas em um ambiente de ensino tal como é, e ainda, sua relação com outros objetos desse saber é complexa demais para ser apresentada a uma pessoa com pouca experiência na área. É com o objetivo de tornar um objeto do Saber Sábio "ensinável" que diferentes agentes da sociedade atuam. Nesse segundo momento, um conjunto de pessoas que desempenham funções de ministro, secretários, técnicos na área da educação reorganizam os objetos do saber sábio para possibilitar seu ensino, constituindo desse modo o que Chevallard (2000) denomina Saber A Ser Ensinado.

O processo de transformação e reorganização dos objetos do Saber Sábio para adequá-lo ao ensino, ou seja, a passagem do Saber Sábio para o Saber A Ser Ensinado é denominada Transposição Didática (Chevallard, 2000). Porém, após esse primeiro processo transpositivo,

[16] O meio é, segundo Brousseau (2008), um sistema autônomo e antagônico às ações dos alunos. Ele retorna resultados diferentes para cada ação dos alunos.

ISSN 2526-2882

os objetos do Saber A Ser Ensinado carecem de adaptação às normas e objetivos da instituição de ensino onde ele será apresentado aos alunos. Por essa razão é que ele passa por uma nova Transposição Didática, dando origem ao Saber Ensinado, aquele que é realizado pelo professor e é de fato encontrado dentro da sala de aula.

Essas pessoas, enquanto agentes institucionais, que atuam em todas as etapas desse processo transpositivo, compõem o que Chevallard (2000) denomina de Noosfera. A Transposição Didática tem como uma de suas funções permitir a identificação de em qual etapa da educação formal – oferecida pela sociedade para seus novos membros – um objeto do saber deve ser ensinado, ou seja, estabelece o local de vida do objeto do saber, denominado habitat (Henriques; Attie; Farias, 2007). Cabe também ao processo transpositivo determinar quais são as funções de um objeto do saber no processo formativo do aluno, bem como de que maneira esse objeto se relacionará com outros objetos, o que é denominado nicho.

A TAD também se volta a explicar como se dão as relações pessoais e institucionais com um objeto do saber, ou seja, ela analisa as práticas que determinada instituição realiza no entorno de um objeto. Nesse contexto, Chevallard (1998) delimita quatro noções: Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria.

A Tarefa pode ser entendida como aquilo que é solicitado que o aprendiz faça, por exemplo: construir um triângulo equiângulo. É comum que uma mesma característica do objeto em estudo esteja associada não a uma Tarefa específica, mas a um conjunto, ou seja, a um Tipo de Tarefa. Toda Tarefa tem pelo menos uma forma de ser realizada. Assim, este modo de cumprir a Tarefa é denominado Técnica.

Além disso, temos a noção de Tecnologia, que pode ser entendida como um discurso inteligível que tem como funções explicar e justificar o funcionamento de uma Técnica. Para desempenhar estas funções, a Tecnologia precisa estar amparada por um conjunto de saberes sobre (e relacionados com) o objeto do saber em estudo, que é a Teoria. Essas quatro noções, reunidas em torno de um mesmo objeto, são denominadas Organização Praxeológica existente no seio de uma instituição.

Esses conceitos expostos até aqui, tanto da TSD quando da TAD, serviram de fio guia para todas as ações que culminaram nesta pesquisa. Tais ações são descritas na seção da metodologia que segue.

Metodologia

Como já pontuamos, este artigo objetiva apresentar a análise de uma atividade desenvolvida para a construção da definição de ângulo por parte de alunos do 6º ano. Atividade esta que faz parte da sequência didática elaborada por Silva (2019), a qual tem como foco a construção da definição de polígono.

A primeira fase dessa investigação foi uma Análise Institucional pautada na TAD, etapa em que foram identificadas Organizações Praxeológicas, nichos e habitats dos polígonos em documentos oficiais e no livro didático adotado pela instituição de ensino participante. Essa Análise Institucional evidenciou a íntima relação entre os objetos matemáticos polígono e ângulo. Daí advém a necessidade de uma atividade voltada à definição de ângulo na sequência, a qual é composta por dez itens que podem ser vistos no Quadro 1.

Quadro 1: Atividade sobre ângulo analisada neste artigo.

ATIVIDADE 3

Crie três pontos A, B e C no plano, e trace as semirretas BA e BC usando a ferramenta 

.
a)Habilite o Rastro[17] da semirreta BA, faça com que o ponto A coincida com o ponto C, depois mova o ponto A para seu local de origem.
b)O que você pode observar?

c)Desabilite o Rastro, selecione a ferramenta Ângulo  e clique nos pontos A, B e C, nessa ordem.
d)Observe o que aconteceu.
e)Mova o ponto A ou C (nos dois sentidos) e observe o que acontece com o ângulo.
f)Qual o maior valor que você consegue obter? E o menor?
g)Escreva, com suas palavras, o que é um ângulo.
h)Abra o arquivo ATIVIDADE 3 e investigue movendo os pontos. O que você pode observar?
i)Separe os ângulos em grupos.
j)Que nome você daria a cada um dos grupos de ângulos?

Acessar no navegador: <**https://ggbm.at/szhqzjrt**>
Baixar: <**https://www.dropbox.com/s/dyrydlzejvt67b1/ATIVIDADE%203.ggb?dl=0**>[18]

Fonte: Silva (2019).

Essa atividade passou por uma análise *a priori* (apresentada na seção seguinte), na qual explicitamos as variáveis didáticas manipuladas na atividade, bem como o objetivo de cada um dos itens que a compõem. Além disso, explicitamos possíveis respostas que os alunos poderiam apresentar, problemas e soluções na realização das construções e explorações das representações no GeoGebra. A sequência como um todo passou por um "teste piloto", o qual aplicamos com um grupo de alunos. A partir desse teste, identificamos necessidades de modificações e pequenos ajustes que culminaram na sequência tal como consta em Silva (2019). Feitas estas alterações, realizamos uma segunda aplicação, da qual derivam os dados analisados neste artigo, e que é apresentada na seção Análise *a posteriori*.

Na análise *a posteriori*, levam-se em consideração as respostas e interações entre três alunos: Manolo, Daniel e Luigi. O primeiro aluno utilizou um computador sozinho, enquanto Daniel e Luigi trabalharam juntos. Tomamos como dados as áudio-gravações e os registros escritos numa folha de papel com a Atividade impressa. Investigamos estes dados sob o ponto de vista tanto da TSD quanto da TAD para verificar se os fatos previstos na análise *a priori* ocorriam e eram tratados como programado. E, principalmente, pretendíamos auferir se o desenvolvimento da Atividade conduzia os alunos à aprendizagem do saber que ela aborda.

[17] Clique com o botão direito do mouse sobre a semirreta e selecione a opção 

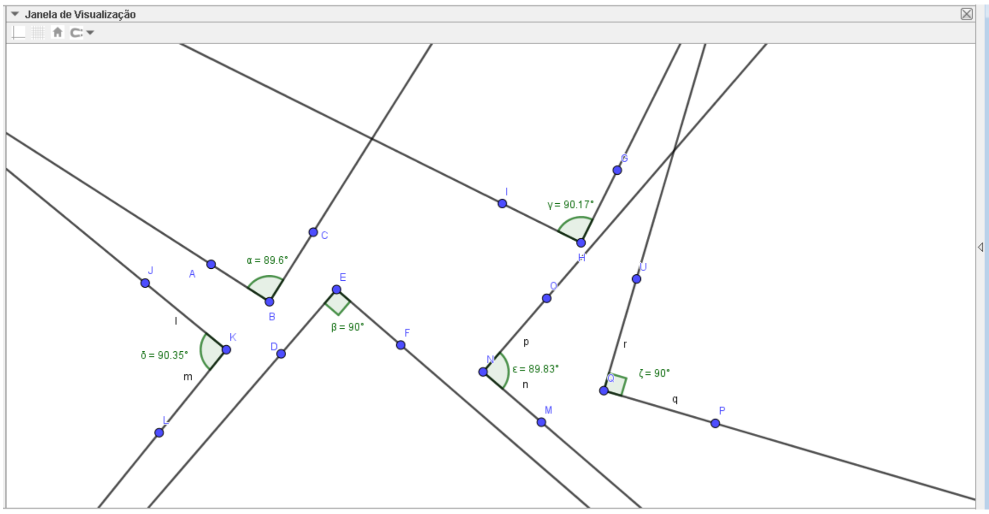
.
[18] Acesso em: 15 jan. 2024.

Análise *a priori*

Nesta seção, segue um resumo dos elementos discutidos na análise *a priori* da atividade sobre ângulos implementada como aluno do 6º ano. Essa análise pode ser lida com maior riqueza de detalhes em Silva (2019).

Os itens que compõem essa Atividade formam três grupos, os quais estão destinados ao desenvolvimento de um objetivo específico. Assim, os itens (a) e (b) têm como objetivo compreender a definição de ângulo como região do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem. Enquanto os itens (c), (d), (e), (f) e (g) foram postos com o intuito de favorecer o entendimento de que os ângulos podem ser associados a um número que diz respeito à "abertura" relativa entre as duas semirretas. Diferentemente do que ocorre com os itens (h), (i) e (j), que visam a levar o aluno a perceber que os ângulos podem ser classificados como agudo, reto ou obtuso, de acordo com suas medidas. Para o cumprimento desses três últimos itens, os alunos tiveram que manipular representações de ângulos previamente construídas pelos pesquisadores, as quais podem ser vistas na Figura 1.

Figura 1: Construções constituintes do Arquivo 3 manipulados pelos alunos na resolução do item (h).



Fonte: Silva (2019)

Nestas atividades, são postos em jogo quatro tipos de variáveis didáticas que influenciam o alcance dos objetivos. A primeira delas é a Amplitude do ângulo, a qual assume um valor inicial livre, pois o ângulo a ser construído, para que os alunos explorassem, poderia ser determinado pelo professor dentro de um intervalo que vai de 0º a 360º. Contudo esse valor foi deixado a critério dos estudantes, uma vez que o processo de construção solicitado na Atividade 3 não exige a determinação prévia desse valor. A partir do item (h), essa variável assume o valor igual a 90º; ou um valor do intervalo]0º, 90º [; até mesmo do intervalo]90º, 360º].

A segunda variável didática é o Rastro, o qual assume inicialmente o valor habilitado e, posteriormente desabilitado. O primeiro valor atribuído a essa variável, habilitado, tem a função de destacar uma das regiões do plano delimitada pelas semirretas, ou seja, gerar um fenômeno visual. Enquanto o valor posteriormente atribuído, desabilitado, tem por função facilitar a visualização da medida do ângulo.

A terceira variável didática destacada nesta atividade é o Arredondamento, a qual deriva do fato de que, em todas as medidas que o GeoGebra apresenta, ele permite calculá-las com precisão de 0 a 15 casas decimais. Nesta atividade, mais especificamente para responder aos itens de (c) a (f), é preferível atribuir a esta variável o valor 0 (zero), para que os alunos percebam que o maior valor do ângulo é 360º e o menor é 0º. Contudo, deixamos o valor padrão, 2, para essa variável.

Por fim, a quarta variável é a Exibição das semirretas, às quais foram atribuídos os valores visível e oculto. Os dois valores são utilizados, gerando, desse modo, um fenômeno visual que poderia contribuir com a classificação dos ângulos.

Essa é uma das atividades mais longas de toda a sequência. Isto porque ela aborda o conceito de ângulo, o qual, em alguns casos, pode ser definido como a união de duas semirretas de mesma origem, ou como uma região do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem. A definição do livro didático analisado afirma que: "ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem em um plano com uma das regiões determinadas por elas" (GAY, 2014, p. 224). Além disso, esta atividade é finalizada com o estudo da classificação dos ângulos quanto a suas medidas.

É evidente que o livro adota a concepção de ângulo como região plana. Entretanto, isso diverge do que foi adotado na construção do *software* utilizado para a construção da sequência. O GeoGebra não oferece ferramenta para evidenciar a região delimitada pelas duas semirretas; ele apenas oferece a ferramenta Ângulo, que fornece a medida do ângulo. Contudo, a função de Habilitar o rastro pode ser aplicada para que não se tenha um desencontro em relação a definição de ângulo, que é eleita pela instituição de aplicação da atividade, enquanto região.

A devolução deveria ser iniciada com o professor desafiando os alunos a conseguirem realizar as construções que a Atividade 3 solicita, lembrando que ela envolve o conceito de semirreta que eles já estudaram; porém, vão usá-lo para construir outras figuras. Com isso, esperava-se que os alunos ficassem um pouco curiosos e tomassem para si a responsabilidade de resolver a atividade, ou seja, o processo de devolução da situação se baseia em despertar a curiosidade dos alunos.

É possível que os alunos já tenham estudado esses conteúdos, mas, caso contrário, as respostas dadas nos itens (b), (g) e (h) poderão ser avaliadas, bem como a participação nos momentos de institucionalização, a fim de determinar se eles aprenderam ou não os conceitos trabalhados.

Uma vez que os alunos tenham respondido a todos os itens, o professor institucionalizaria as definições e notações oriundas do livro didático adotado pela instituição de ensino participante da aplicação da Sequência Didática.

Análise *a posteriori*

Nesta seção, apresentamos e analisamos todo o processo de resolução da situação didática proposta, desde as interações entre aluno, professor, saber, instrumento (GeoGebra) até a solução apresentada para os itens. A análise começa, assim, com o momento em que Manolo recebeu a folha com a Atividade 3 e afirmou: Manolo: "Agora me acostumei com esse negócio". Por meio desta fala, o aluno afirma que, após resolver duas atividades que antecederam a esta sobre ângulos, o GeoGebra já se tornou uma ferramenta de estudo para ele. Durante a situação de ação, os alunos não observaram que tinham que construir duas semirretas de mesma origem, e assim, alguns deles traçaram a semirreta BA e CB. O pesquisador[19] interveio, como previsto na análise *a priori*, relembrando que o ponto B é a origem das duas semirretas e efetuou nova devolução ao solicitar que eles realizassem o traçado das semirretas novamente. Outra dificuldade, prevista na análise *a priori*, verificada na implementação, foi a de habilitar o rastro da semirreta BA. Uma vez vencidos estes problemas, os alunos registraram as observações presentes, como podemos ver na Figura 2 (na Figura 2a, consta o registro de Manolo. Na Figura 2b, consta o registro de Daniel e Luigi) referentes ao item (b) da Atividade 3.

Figura 2 - Resposta apresentada por Manolo, Daniel e Luigi para o item (b) da Atividade 3

b) O que você pode observar? que a reta a ela Pode se movimenta em todas as formas e tambem esta escura.
Que a reta A ela pode ser movimentada em todas as formas e também está escura.
b) O que você pode observar? Ele escureceu uma região ~~(...)~~ menor que 180° e maior que 90°
Ele escureceu uma região menor que 180^{o} e maior que 90^{o}.

Fonte: Silva (2019).

É possível observar, em ambos os registros, que esta etapa da Atividade 3 cumpriu sua função, pois todos os alunos conseguiram notar a região escurecida e destacada da branca. No registro de Manolo (Figura 2a), podemos observar a influência do caráter dinâmico da construção na resposta desse aluno. Ele observou que a semirreta podia ser rotacionada em todas as direções. O fato de ele ter chamado a semirreta de "reta" foi uma espécie de transferência da fala para a escrita de um erro comum que observamos neste estudante durante

[19] Nesta seção, utilizaremos as palavras *professor* e *pesquisador* de forma alternada, pois trata-se da mesma pessoa.

ISSN 2526-2882

toda a aplicação das Atividades, em alguns momentos o pesquisador corrigia, mas persistia trocando semirreta e segmento de reta por reta.

Na Figura 2b, podemos observar que Daniel e Luigi utilizam o termo “região”, e essa palavra foi utilizada pelo pesquisador para efetuar uma devolução. Em um dado momento, eles questionaram o pesquisador sobre o que deveriam escrever. Então, ele respondeu fazendo o seguinte questionamento: *Pesquisador;* O que aconteceu com essa região quando vocês fizeram o ponto A coincidir com o ponto C?

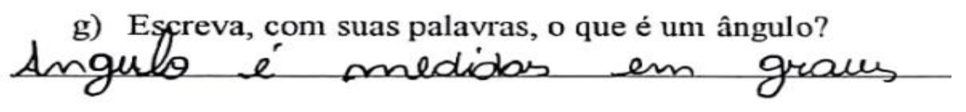
Procedendo assim, o pesquisador colocou-se na fronteira entre efetuar uma devolução para que os alunos refletissem sobre as retroações do meio e provocar o Efeito Topaze, facilitando demasiadamente a resolução da atividade. Isto poderia ter levado os alunos a incluírem no contrato didático uma cláusula de sempre esperar que o pesquisador interpretasse para eles os fenômenos visuais decorrentes da manipulação do GeoGebra.

Daniel e Luigi também registraram um intervalo da medida do ângulo. Contudo, o pesquisador observou que esse registro foi realizado na Tarefa do item (f), o qual será analisado no decorrer deste texto. É possível inferir desse registro *a posteriori* dos alunos que eles passaram a considerar a medida do ângulo como um atributo importante da construção e, por essa razão, eles perceberam a necessidade de modificar o modelo explícito formulado anteriormente. Este fato observado é um indício de que houve uma modificação no conhecimento prévio.

Há uma outra possível interpretação, diferente dessa, para esse fenômeno didático, que é a de que, no item (b), os alunos não associaram a construção com algum objeto matemático que eles estudaram, nesse caso, ângulo. Entretanto, o objeto do saber foi reconhecido no decorrer da atividade quando mediram o ângulo. A partir disso, pode-se inferir que o processo de estudo anterior desse objeto levou os alunos a dar mais atenção à sua medida do que aos elementos que constituem esse objeto geométrico (semirretas, pontos e semiplanos).

Esse segundo ponto de vista ganha mais subsídios ao analisarmos os registros dos alunos para o item (g), o qual solicitava que eles escrevessem, com suas palavras, o que é um ângulo. Assim, os alunos apresentaram os registros que constam na Figura 3.

Figura 3 - Resposta apresentada por Manolo, Daniel e Luigi para o item (g) da Atividade 3

 g) Escreva, com suas palavras, o que é um ângulo? Ângulo é medidas em graus   a
Ângulo é medidas em graus.
b-O ângulo é uma forma geométrica de medir tanto coisas da natureza quanto de construções de casa, terreno, formas geométricas e etc.

Fonte: Silva (2019).

ISSN 2526-2882

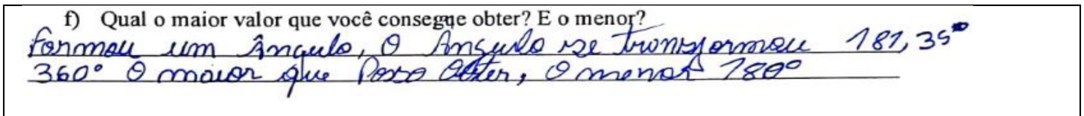
No momento em que nos deparamos com o registro de Daniel e Luigi (conforme Figura 3a), tivemos uma primeira impressão de que o fato de eles terem mencionado apenas a medida na "definição" de ângulo, decorria das ações e formulações solicitadas nos itens (c), (d), (e) e (f). Esses itens enfatizam a medida de ângulo, uma vez que estão direcionados para que os alunos observem que o ângulo (enquanto região plana) pode ser associado a um número real que varia de 0º a 360º. No entanto, ao lermos o registro de Manolo (conforme a Figura 3b), é-nos evidenciado que essa ênfase na medida decorre de um processo de estudo anterior à aplicação da Sequência Didática. Observa-se que Manolo cita exemplos que aparecem no livro didático para mostrar a aplicação desse objeto matemático no mundo real e no contexto particular da própria matemática.

Não é surpreendente que os alunos retenham, em suas imagens mentais sobre ângulo, apenas as medidas e, até certo ponto, ignorem o fato de ele ser uma região. Isto é até natural, se tomarmos como referência os tipos de práticas, ou seja, as Organizações Praxeológicas através das quais os alunos terão de mobilizar o conceito de ângulo durante sua formação. É sabido que as situações que requererão a medida dos ângulos, tais como a classificação de um polígono como regular ou não-regular, a qual precisa que se verifiquem as medidas dos ângulos internos destes. Outro exemplo é quando se estudam os ângulos entre vetores no Ensino Superior, em cujo contexto o que é observado também é a medida dos ângulos, e não a região.

Além disso, é muito mais simples para os alunos assimilarem e perceberem uma utilidade para a medida do ângulo do que para uma região que se estende infinitamente, sendo limitada lateralmente por semirretas, e que escapam aos limites da sua imaginação. Números são mais "palpáveis" do que o uma região infinita. O professor de Matemática, o escritor de livros didáticos e os diferentes elementos da Noosfera preocupam-se em enfatizar aquilo que os alunos realmente necessitarão, tanto na continuação dos seus estudos quanto em situações cotidianas. Agora, retornando para os itens (c), (d), (e) e (f), os três primeiros estão voltados a direcionar as ações e as formulações dos alunos para a medida dos ângulos, enquanto o item (f) questiona os estudantes sobre a variação da medida dos ângulos.

Nesses itens, decidimos experimentar a influência da variável didática "Arredondamento" nas observações dos alunos, ao mantermos o seu valor igual a 2 casas decimais. Com isso, percebemos que, de fato, os alunos registraram exatamente o valor que observavam, conforme se mostra na Imagem 4. Porém, quando questionados sobre qual era o valor aproximado, eles respondiam, por exemplo, 360º.

Figura 4: Resposta apresentada por Manolo para o item (f) da Atividade 3


f) Qual o maior valor que você consegue obter? E o menor?
formou um ângulo, O Angulo se transformou 181,35º
360º O maior que posso obter, O menor 180º

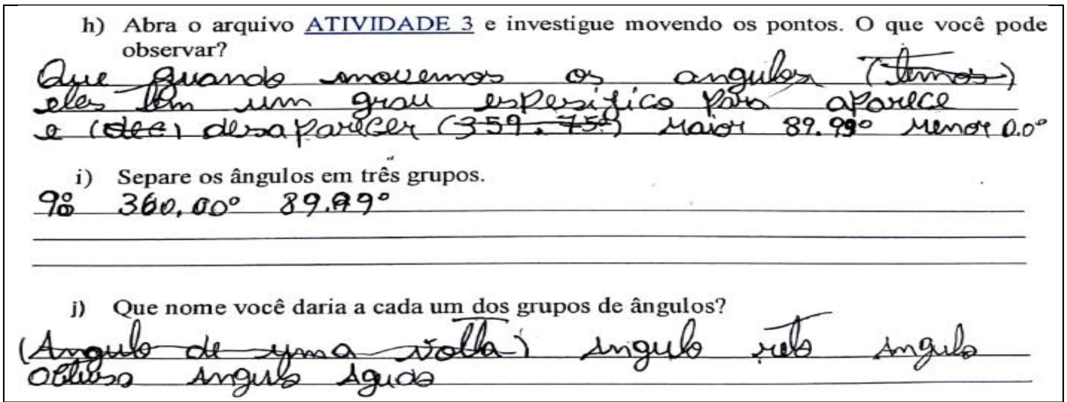
Formou um ângulo, o ângulo se transformou 181,35º ; 360º o maior que posso obter, o menor 180º

Fonte: Silva (2019).

Na Figura 4, observamos que Manolo afirma que o ângulo só pode assumir valores no intervalo [180º, 360º]. Não por coincidência, o menor valor é próximo à medida do ângulo que ele construiu inicialmente. Esse foi um fenômeno observado também no teste piloto desta sequência, a saber: a maioria dos participantes registravam o valor da medida do ângulo assim que foi criado como sendo o menor valor. O pesquisador constatou esse fato após os alunos registrarem na folha da atividade, mas Manolo solicitou que tentassem obter um valor ainda menor e eles perceberam que a menor medida do ângulo era 0º.

Ao se depararem com a quantidade de construções (cf. Figura 1) a serem utilizadas no item (h), os alunos não sabiam o que observar. O pesquisador teve precisou realizar diversas devoluções para que os alunos persistissem na busca pela solução. Por exemplo, ele teve que fazer perguntas do tipo: Quando é que esse ângulo desaparece? Com qual medida o ângulo ABC desaparece? Qual o maior e o menor valor que você consegue obter movendo esse ângulo? A partir desses questionamentos, conseguiu-se obter respostas semelhantes à apresentada na Figura 5.

Figura 5: Resposta apresentada por Daniel e Luigi para os itens (h), (i) e (j) da Atividade 3


h) Abra o arquivo ATIVIDADE 3 e investigue movendo os pontos. O que você pode observar?

Que quando movemos os angulos (~~temos~~) eles têm um grau espesifico para aparece e (~~dee~~) desaparecer (~~359.75~~) maior 89.99° menor 0.0°

i) Separe os ângulos em três grupos.

90° 360,00° 89.99°

j) Que nome você daria a cada um dos grupos de ângulos?

(~~Angulo de uma volta~~) angulo reto angulo obtuso angulo agudo

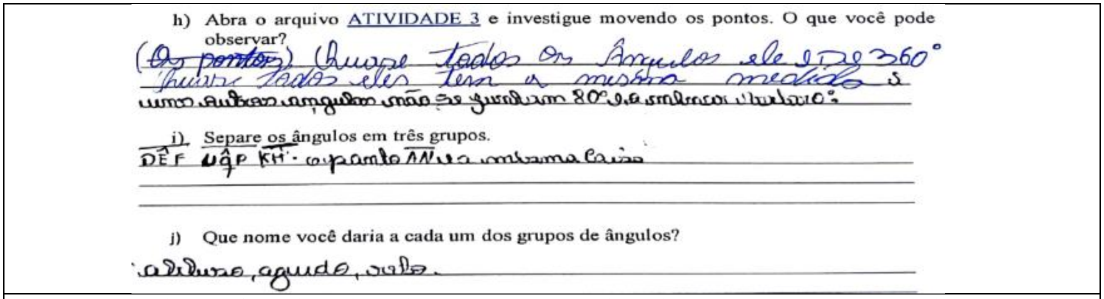
h) Que quando movemos os ângulos eles têm um grau específico para aparecer e desaparecer maior 89.99º menor 0.0º
i) 90º 360.00º 89.99º
j) Ângulo reto ângulo obtuso ângulo Agudo.

Fonte: Silva (2019).

É possível observar que Daniel e Luigi observaram que os ângulos tinham que estar com suas medidas em um determinado intervalo para estarem visíveis. Na resposta do item (h), por exemplo, eles falam dos ângulos agudos que medem um valor $x, tal\ que\ 0° \leq x < 90°$. Diante disso, o professor solicitou que os alunos procurassem outro ângulo no Arquivo 3 que tivesse a mesma característica para formar um grupo. Feito isso, a dupla inicia novas situações de ação, formulação e validação culminando com a apresentação de uma classificação para os ângulos que pode ser considerada correta.

Enquanto isso, os registros escritos apresentados por Manolo eram nada coerentes, com alguns trechos que não nos permitia afirmar se ele de fato conseguiu ou não perceber as características dos ângulos e agrupá-los, conforme é mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Resposta apresentada por Manolo para os itens (h), (i) e (j) da Atividade 3


h) Abra o arquivo ATIVIDADE 3 e investigue movendo os pontos. O que você pode observar?

~~(Os pontos)~~ Quase todos os Ângulos ele é de 360°
Quase todos eles tem a mesma medida uns outros ângulos não se juntam 80° é o menor valor.

i) Separe os ângulos em três grupos.

DÊF UQP KH: o ponto AN é a mesma coisa

j) Que nome você daria a cada um dos grupos de ângulos?

obtuso, agudo, reto.

h) Quase todos os ângulos ele é de 360º quase todos eles têm a mesma medida uns outros ângulos não se juntam 80º é o menor valor
i) $D\hat{E}F, U\hat{Q}P, \hat{K}\hat{H}$. O ponto $\overline{AN}$ é a mesma coisa.
j) obtuso, agudo, reto.

Fonte: Silva (2019).

No registro do item (h), acreditamos que Manolo separou os ângulos em dois grupos: os que podem assumir valores maiores que 90º e os que não podem. O trecho que mais nos deixou em dúvida se ele havia respondido corretamente ou não a atividade foi o item (i), pois não tínhamos certeza de que ele havia percebido que os ângulos $D\hat{E}F$ e $U\hat{Q}P$ formam um grupo, e os ângulos $J\hat{K}L, G\hat{H}I$ formam outro grupo, e que os ângulos de vértices nos pontos A e N formavam o terceiro grupo solicitado. Diante dessas respostas dúbias, recorremos às gravações de áudio com o intuito de identificar o momento em que Manolo chamou o pesquisador e estabeleceu o seguinte diálogo:

Manolo:	Sim, professor, esses ângulos aqui [referindo-se ao ângulo $A\hat{B}C$], ele vai até 89º. Esse [$J\hat{K}L$] vai de 360º a 90º.
Professor:	Sim, e esse de cá [ângulo DÊF], varia como?
Manolo:	Esses quadrados [referindo-se à marcação gráfica de ângulos retos] eles... é... só até 90º mesmo.

A partir desse diálogo, dissipamos nossas dúvidas se de fato Manolo teria conseguido compreender o que estava sendo proposto na situação. Após essa interação com o professor-pesquisador, Manolo entra novamente, por conta própria, em situação de ação em que manipula os demais ângulos e identifica os pares. Os nomes das classes de ângulos, item (j), foram informados pelo pesquisador, haja vista que ele observou que os alunos se lembravam do nome “ângulos retos” e faziam muito esforço para se lembrarem dos outros nomes.

Embora os alunos tenham estudado esses tipos de ângulos anteriormente, vimos que eles não os reconheceram; isto porque eles estavam acostumados com uma representação estática. Todavia, nota-se nesta parte da Atividade 3 que os alunos vivenciaram as fases de uma situação didática. Primeiramente, eles entraram na situação de Ação, na qual exploraram os ângulos, perceberam que alguns desapareciam e iniciaram uma situação de formulação, na qual tentaram determinar sob que circunstâncias eles desapareciam. A situação de Validação se deu em momentos como os apresentados no diálogo anterior, em que os alunos manipulavam novamente a construção para mostrar ao professor o que havia observado e acompanhado de uma prova visual. A institucionalização foi realizada pelo professor ao final, tendo este adiantado apenas os nomes que seriam dados a cada grupo de ângulos.

O GeoGebra, nesse contexto, foi fundamental, pois sem o fenômeno visual, o desaparecimento dos ângulos, os alunos certamente não teriam se envolvido na atividade, tampouco teriam observado as características de cada grupo. Nesta atividade, desenvolveu-se um tipo de exploração que dificilmente poderia ser realizada em outro ambiente que não fosse de Geometria dinâmica. Assim, o GeoGebra é tido como uma fonte geradora de fenômenos visuais que desestabiliza os conhecimentos prévios dos alunos e que propicia novas dimensões do significado de um objeto matemático.

Essa atividade foi a mais longa de todas da sequência didática elaborada, cuja implementação teve a duração de aproximadamente 57 minutos, tendo os alunos se mostrando mais hábeis como a manipulação do GeoGebra.

Últimas Considerações

No desenvolvimento desta atividade junto a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, foi possível observar que, embora a definição de ângulo identificada no livro didático adotado pela instituição de aplicação não faça referência às medidas, o conhecimento sobre ângulos que resiste ao tempo e que transcende ao momento e à situação didática proposta é o conhecimento sobre as medidas dos ângulos.

Assim, notamos que o fato de o ângulo poder ser, por definição, uma região plana é simplesmente ignorado, ou talvez esquecido pelos alunos. Desse modo, para os alunos, os ângulos adquirem uma nova definição: “ângulo é medida”. Acreditamos que isto se deva ao caráter mais prático e palpável da ideia de ângulo como medida. É mais “fácil” lembrar de um objeto pelas ações que realizamos com ele do que da sua essência. Por exemplo, quando pensamos em um martelo, lembramos que ele serve para cravar pregos numa madeira e, muito dificilmente, recordamos que ele é composto por uma parte feita de liga metálica resistente e por um cabo que tem por função dar sustentação à ferramenta para o seu uso. Assim, definir um martelo como “algo que serve para pregar” não é um absurdo do ponto de vista cognitivo.

Com respeito às limitações da atividade para o estudo dos ângulos, relembramos que essa atividade foi desenvolvida para corroborar a construção da definição de polígono. Por essa razão é que ela não explora as ideias de ângulos adjacentes, opostos pelo vértice, correspondentes, alternos etc. Contudo, o caráter dinâmico do GeoGebra certamente poderia ser empregado na constituição de um meio para a abordagem desses conceitos numa aula de Matemática.

Mesmo assim, podemos afirmar que essa atividade contribuiu para a aprendizagem dos alunos, pelo fato de que, embora eles já houvessem estudado ângulos em um momento anterior, não foram capazes de reconhecer os diferentes tipos de ângulos em representações

ISSN 2526-2882

diferentes das prototípicas que lhes foram apresentadas. Mais uma vez, o uso do GeoGebra se mostrou como uma escolha acertada do ponto de vista didático, por ofertar o acesso a uma gama de representações do mesmo objeto matemático.

Além do interesse que os estudantes demonstraram em manipular o GeoGebra, o fato de ser um ambiente não usual para eles facilitou a devolução das situações, pois cada construção a ser realizada era considerada como um desafio pelos alunos. Sendo assim, eles se sentiam motivados a assumir o problema para si.

Referências

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. 3. ed, Buenos Aires: Aique, 2000. 196 p. (Psicologia cognitiva y educacición).

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. *In:* L'UNIVERSITE D'ETE. **Actes de l'Université d'été La Rochelle**. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998. p. 91-118.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. *In:* MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008. GAY, M. R. G. (Ed.). Projeto Araribá: Matemática. São Paulo: Moderna, 4. ed. 2014 (V. 1, p. 77-111).

GAY, M. R. G. (Ed.). Projeto Araribá: Matemática. São Paulo: Moderna, 4. ed. 2014 (V. 1).

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 9, n. 1, p. 51-81, 2007. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/585>. Acesso em: 11 ago. 2018.

SILVA, J. O. **Uma sequência didática volta para definição de polígono no sexto ano**. 2019. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Santa Cruz, 2019.

VELOSO, E. **Geometria:** Temas actuais. Lisboa: IIE, 1998.

Biografia Resumida

Joaby de Oliveira Silva: Professor da rede pública do estado da Paraíba, Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana e Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz.

Lattes: http://lattes.cnpq.br/8083498282802181
e-mail: joaby.osilva@professor.pb.gov.br

Gilson Bispo de Jesus: Professor Associado na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB, Centro de Formação de Professores - CFP. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Bahia - UFBA. Mestrado e Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/2693146256703536
e-mail: gilbjs@gmail.com