O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais

Silvia Rocha Falvo

Rosineide de Sousa Jucá

Resumo

Este artigo tem por objetivo investigar o raciocínio proporcional de um grupo de professores dos anos iniciais, levando-os a refletir sobre esse objeto do conhecimento. usando, para isso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. O experimento ocorreu durante um curso de formação continuada oferecido a professores do Ensino Fundamental, anos iniciais, da Rede Municipal de uma cidade do interior de São Paulo, como parte de uma pesquisa de Mestrado, do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, UNESP, Rio Claro. A metodologia de pesquisa utilizada foi um estudo de caso, visto que tínhamos interesse em conhecer o raciocínio proporcional e o conceito de proporcionalidade de um grupo de professores. Os resultados apontaram que a maior parte dos professores tiveram dificuldades na resolução do problema proposto e para justificar suas respostas, prendendo-se a respostas do campo aditivo e focando em uma reposta numérica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação de Professores. Resolução de Problemas. Raciocínio Proporcional e Proporcionalidade.

Proportional reasoning through problem solving: a training experience with teachers who work in the early years

Silvia Rocha Falvo

Rosineide de Sousa Jucá

Abstract

This article aims to investigate the proportional reasoning of a group of teachers in the early years, leading them to reflect on this object of knowledge, using the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving. The experiment took place during a continuing education course offered to elementary school teachers, early years, from the Municipal Network of a city in the interior of São Paulo, as part of a Master's research, from the GTERP - Group of Work and Studies in Problem Solving. Problems, UNESP, Rio Claro. The research methodology used was the case study, since we were interested in knowing the proportional reasoning and the concept of proportionality of a group of teachers. The results showed that most teachers had difficulty in solving the proposed problem and in justifying their answers, sticking to additive field answers and focusing on a numerical answer.

Keywords: Mathematics Education. Teacher training. Problem solving. Proportional Reasoning and Proportionality.

Introdução

Vários estudos em Educação Matemática evidenciam a relevância do desenvolvimento do raciocínio matemático e, dentre eles, os estudos de Vieira, Rodrigues e Serrazina (2021), Serrazina, Rodrigues e Araman (2020), Jeannotte e Kieran (2017), salientando que o raciocínio matemático é compreendido como o processo de utilizar informação matemática já conhecida para obter novos conhecimentos ou novas conclusões. Além do que, destacam a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), em suas recomendações para o ensino da Matemática, destaca processos matemáticos como conjecturar, representar, comunicar, argumentar e generalizar. Sabemos que esses processos constituem o raciocínio matemático e que são necessários para a resolução de problemas e essenciais para o desenvolvimento das competências fundamentais para o letramento matemático.

Concordamos com Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020), Serrazina, Rodrigues e Araman (2020), Jeannotte e Kieran (2017) por não considerar o raciocínio matemático como emprego e aplicação de procedimentos ou ações mecanizadas que não produzem inferências. Visto que, nesses procedimentos, os alunos apenas repetem, de forma mecanizada, alguma regra ou procedimento que aprenderam, não refletindo sobre os resultados e não produzindo novos conhecimentos. Pois, como colocam Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020) e Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio matemático é o processo de utilizar informação matemática conhecida para obter um novo conhecimento ou novas conclusões.

Dentre os diversos raciocínios matemáticos existentes destacamos, neste trabalho, o raciocínio proporcional, que é discutido nos estudos de Lesh, Post e Behr (1991), Cramer, Post e Currier (1993), Norton (2005), Lamon (2012) e Howe, Nunes e Bryant (2010). Para esses autores, o raciocínio proporcional envolve os sentidos de covariação, múltiplas comparações e aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação e, além disso, está relacionado com a inferência e a predição envolvendo os pensamentos qualitativo e quantitativo. Portanto, é um conceito alicerce para a aprendizagem de outros conteúdos de Matemática e das ciências em geral.

Assim sendo, o ensino de razão e proporção nas escolas deve acontecer de forma significativa, de forma a proporcionar que os alunos a aprendam resolver problemas de proporção de maneira diversificada e, não apenas aplicando um método memorizado, sem compreender seu significado e que não lhes produz uma reflexão dos resultados, levando-os a respostas incorretas e absurdas e não possibilitando o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Para Kilpatrick, Swafford e Findell (2001), quando os alunos praticam procedimentos que não entendem existe o perigo de praticarem procedimentos incorretos, tornando-se mais difícil aprender os corretos.

Ao se referir aos professores que atuam nos anos iniciais, as discussões que envolvem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos são ainda mais complexas, visto que esses professores possuem deficiências conceituais relacionadas à Matemática e, por isso, utilizam em maior número apenas a reprodução de procedimentos matemáticos, como algoritmos para ensinar matemática. Segundo Kilpatrick, Swafford e Findell (2001), é pouco provável que os professores possam oferecer aos seus alunos uma boa explicação sobre conceitos que eles não compreendem e que lhes ofereçam resoluções diversificadas para um dado problema, se eles próprios conseguem resolver de uma única forma.

As discussões sobre resolução de problemas em estudos de Van de Walle (2009), Onuchic e Alevatto (2011), Onuchic (2012) apontam que a resolução de problemas é uma alternativa para que os alunos aprendam matemática. Para tanto, Onuchic e Alevatto (2011) desenvolveram uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, na qual os três processos acontecem de forma simultânea.

Nesse contexto, temos como objetivo investigar o raciocínio proporcional de um grupo de professores dos anos iniciais, levando-os a refletir sobre esse objeto do conhecimento através de situações-problema, usando, para isso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, verificando se os professores de anos iniciais investigados conseguem diferenciar situações proporcionais das não proporcionais.

O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas

Os estudos de Lesh, Post e Behr (1991), Cramer, Post e Currier (1993), Norton (2005), Lamon (2012), Cyrino (2016) trazem discussões referentes ao raciocínio proporcional e seu desenvolvimento no contexto escolar.

Lesh, Post e Behr (1991), ao definir o raciocínio proporcional, explicam que é uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de variância e possibilita múltiplas comparações, assim como a aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação. O raciocínio proporcional está relacionado com inferências e predição e envolve os pensamentos qualitativo e quantitativo. Para estes autores as pessoas que resolvem problemas de proporção não usam necessariamente o raciocínio proporcional, pois se observam relações numéricas simples ou o uso de um algoritmo como o produto cruzado.

Para Cramer, Post e Currier (1993), a aquisição da habilidade do pensamento proporcional da população de forma geral são insatisfatórias. Além dessa habilidade emergir lentamente, há evidências de que um grande segmento de nossa sociedade nunca as adquiriu.

Lamon (2012) corrobora com essas afirmações, ao indicar que mais de 90% dos adultos não raciocinam proporcionalmente e apresenta evidências convincentes de que esse processo de raciocínio implica mais do que desenvolvimento de processos e que o ensino deve

ISSN 2526-2882

desempenhar um papel ativo em seu surgimento. Essa autora coloca que raciocínio proporcional não é sinônimo de proporcionalidade e que raciocínio proporcional é condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade.

Para Cyrino (2016), o raciocínio proporcional é um caminho importante para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e para a compreensão dos alunos sobre o significado das funções. No entanto, o raciocínio proporcional não pode ser adotado como sinônimo de proporcionalidade, senão como condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações matemáticas que envolvam proporção/proporcionalidade.

Nesse sentido, o raciocínio proporcional pode ser usado na resolução de problemas dentro e fora do contexto escolar. No contexto escolar, o raciocínio proporcional é considerado um dos conteúdos mais relevantes no aprendizado da aritmética e a base para conceitos matemáticos mais complexos envolvendo proporção/proporcionalidade em Geometria e Álgebra (CYRINO, 2016).

Lesh, Post e Behr (1991), ao se referirem ao uso de técnicas para resolver problemas de proporção, afirmam que que o ensino da técnica do método cruzado não tem colaborado para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Apesar de ser frequentemente usado pelos alunos, é mal compreendido por eles e serve mais para evitar o desenvolvimento do raciocínio proporcional do que para o facilitar.

Com o intuito de descobrir as causas das dificuldades no desenvolvimento do raciocínio proporcional, Lesh, Post e Behr (1991) apontam sete tipos de problemas de proporção: problemas do valor omisso; problemas de comparação; problemas de transformação que são divididos em alteração de raciocínio e transformações para obter uma igualdade; problemas do valor médio que envolvem a média geométrica e a média harmônica; problemas de proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações; problemas de proporções que envolvem unidades de medida, assim como números e problemas de conversão entre sistemas de representação. Esses problemas enfatizam diferentes aspectos de proporcionalidade e do raciocínio proporcional.

Cyrino (2016) destaca dois aspectos do raciocínio proporcional: os aspectos quantitativos relacionados à capacidade de resolver algoritmos matemáticos corretamente, pensar em grandezas numéricas em termos relativos, conceber a razão como uma relação constante (mesmo com a covariação das grandezas que a geraram) e os aspectos qualitativos, que envolvem a capacidade de identificar situações em que quantidades numéricas se relacionam de forma multiplicativa e não aditiva. Para Norton (2005) a essência do pensamento proporcional é essencialmente multiplicativa. Muitos dos padrões de erro que os alunos demonstram, em relação a problemas de raciocínio proporcional, ilustram que os alunos aplicam processos do pensamento aditivo ou subtrativo, em vez de processos multiplicativos.

Segundo Costa (2007) é importante que os alunos sejam capazes de reconhecer situações proporcionais e não proporcionais, resolvendo tarefas de raciocínio proporcional de naturezas quantitativa e qualitativa; compreender que podem ser usados vários métodos na resolução de tarefas proporcionais e que esses métodos se relacionam entre si; e, também, não se deixar influenciar, durante a resolução das tarefas, pelo contexto dos números.

Outro ponto a destacar é a deficiência da aprendizagem dos alunos em relação aos números racionais que acaba por influenciar no desenvolvimento do raciocínio proporcional pois, como afirma Howe, Nunes e Bryant (2010) os baixos desempenhos dos alunos com os números racionais têm implicações para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Isso porque o raciocínio proporcional gira em torno do conceito de razão, um tipo de número racional.

Em virtude do exposto nos estudos supracitados, é preciso pensar em propostas de ensino que possibilitem aos alunos, sejam do Ensino Fundamental, sejam do Ensino Médio, o desenvolvimento do raciocínio proporcional, visto que estudos feitos apontaram a importância desse raciocínio para o desenvolvimento dos alunos em Matemática e em outras áreas de conhecimento (VERGNAUD, 2013). No entanto, para isso é preciso que os professores tenham conhecimento de que somente resolver problemas de proporção por métodos ou técnicas mecanizadas não garante que o aluno desenvolva o raciocínio proporcional.

Em se tratando dos professores que atuam nos anos iniciais é preciso oportunizar momentos de discussão e de aprendizado em relação a esse tema, visto que eles mesmos, por apresentarem uma formação mais geral, talvez não tenham tido oportunidades para aprender sobre proporção e raciocínio proporcional em seus cursos de formação inicial e nem de como trabalhar isso com seus alunos. Nesse sentido, os estudos de Cyrino (2016), Santos, Paiva e Lorenzutti (2019) apresentaram resultados de formações realizadas com os professores, tanto no âmbito da formação inicial quanto da continuada, nas quais foram desenvolvidas atividades para a discussão de proporção e do raciocínio proporcional via resolução de problemas.

Os estudos supracitados mostraram que os professores, ao resolver problemas, tiveram oportunidade de aprender, por meio do compartilhamento de repertórios e saberes, que permitiram a negociação de significados e, portanto, o desenvolvimento da experiência de aprendizagem em relação ao raciocínio proporcional e como isso contribuiu para as modificações em suas práticas. Esses momentos de formação colaborativa trazem contribuições importantes para os professores visto que eles podem trocar experiências em diálogo com seus pares, ao mesmo tempo que podem refletir sobre suas práticas e redirecioná-las. No entanto, a formação de professores não é uma tarefa simples, pois exige conhecimentos outros, como conhecimento sobre e como os alunos aprendem, como se dá o seu desenvolvimento, dos objetivos dos currículos, além dos conhecimentos dos conteúdos e de como ensiná-los.

ISSN 2526-2882

Nesse sentido, as formações dos professores que ensinam matemática devem promover reflexões que contribuam para mudanças em suas práticas, em que o aluno passe a ser protagonista de sua aprendizagem e o professor, o orientador. Essa forma de ensinar se contrapõe ao modelo atual de ensino, no qual o professor ensina o conteúdo de matemática e os alunos praticam durante algum tempo e, então, é esperado que eles usem as novas habilidades ou ideias na resolução de problemas (VAN DE WALLE, 2009).

Esta abordagem, muito enraizada em nossa cultura, raramente "funciona bem". Portanto, o ensino de matemática precisa ser planejado para que o aluno possa desenvolver suas habilidades de raciocinar, comunicar, justificar e desenvolver argumentações matemáticas. O caminho desse processo de aprender matemática pode ser desenvolvido por meio da resolução de problemas.

Autores como Onuchic e Alevatto (2011) e Onuchic et al (2014), Van de Walle (2009) defendem que o ensino de matemática dever ocorrer através de resolução de problemas, pois permite que os alunos aprendam conceitos e habilidades matemáticas além do desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível. Para Van de Walle (2009) a resolução de problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino. Recomenda ele, que o trabalho de ensinar comece sempre por onde estão os alunos, ou seja, a seleção de tarefas deve levar em consideração a compreensão matemática atual dos estudantes. Eles devem ter as suas próprias ideias para se envolver e resolver o problema e, ainda assim, considerá-lo desafiador e interessante. Para o autor, o papel do professor é criar e manter um ambiente matemático motivador e estimulante.

Em continuação Van de Walle (2009) afirma que para o aluno aprender matemática pela resolução de problemas é preciso levar em consideração que o problema deve estar no nível de conhecimento dos alunos, que o problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender, e que a aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos utilizados. Sendo assim, "as tarefas ou atividades baseadas em resolução de problemas são o veículo pelo qual se pode desenvolver o currículo desejado e a aprendizagem é um resultado do processo de Resolução de Problemas" (VAN DE WALLE, 2009, p. 58).

Os estudos de Onuchic e Allevato (2011,2014), Onuchic (1999, 2012) trazem discussões sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, desenvolvida pelo GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas). Nesta abordagem, a resolução do problema é o ponto de partida para a construção

de novos conceitos, novos conteúdos e novos algoritmos matemáticos em sala de aula. Para Onuchic (2012), nessa metodologia, o ensino e a aprendizagem ocorrem de maneira simultânea, na qual o professor tem o papel de orientador e os alunos de co-construtores do

ISSN 2526-2882

conhecimento matemático. Além disso, nessa metodologia, enquanto se ensina, avalia-se o aluno e o professor, promovendo a aprendizagem durante a resolução do problema. Ao integrar-se ao ensino, com vistas a acompanhar o crescimento do aluno, amplia sua aprendizagem e reorienta as práticas em salas de aula quando necessário

Onuchic e Allevato (2014) apresentam as etapas da metdologia com o objetivo de auxiliar os professores no planejamento e na execução de suas aulas e que se desenvolve através dos seguintes passos: 1) Preparação do problema, 2) Leitura individual, 3) Leitura em conjunto, 4) Resolução do problema, 5) Observar e motivar, 6) Registro das resoluções na lousa, 7) Plenária, 8) Busca de consenso, 9) Formalização do conteúdo e 10) Aplicação de novos problemas. Ao longo do tempo, dentro do GTERP, essa lista foi bastante discutida e várias vezes modificada. No entanto, para que o professor possa aplicar essa metodologia é preciso que lhes sejam dadas oportunidades de formação, em que se discutam resolução de problemas e como desenvolvê-la em sala de aula. Isso deve ocorrer nos cursos de formação inicial e continuada de professores.

Metodologia de Pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é de caráter qualitativo, no qual desenvolvemos um estudo de caso, que segundo Yin (2001), os estudos de caso não buscam a generalização de seus resultados, mas sim, a compreensão e a interpretação mais profundam dos fatos e fenômenos específicos.

Nesse sentido, este estudo se caracteriza como estudo de caso pois temos interesse em compreender os saberes e as interpretações que um grupo de professores dos anos iniciais possuem em relação a situações-problema que envolvem proporcionalidade. Para isso adotamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas desenvolvida no GTERP por Onuchic e Allevato (2014).

A pesquisa ocorreu durante o mês de novembro de 2021 no Curso de Extensão “O Raciocínio Proporcional e A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”, oferecido pela UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte de uma pesquisa de Mestrado. O curso foi ministrado pela plataforma Google Meet, devido à pandemia de COVID-19[21], para professores dos anos iniciais da rede municipal de uma cidade do interior de São Paulo. Ao todo, foram realizados 16 encontros semanais (8 síncronos e 8 assíncronos).

Neste trabalho descrevemos parte do sétimo encontro, que teve por objetivo (como todos os outros) desenvolver competências e habilidades matemáticas e aprimorar a prática

[21] A Pandemia de COVID-19 refere-se à uma doença infecciosa causada pelo vírus SARS-CoV-2, que se espalhou pelo mundo, iniciando-se em 2019 e prolongando-se por 2020.

ISSN 2526-2882

do professor com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesse encontro exploramos as ideias de raciocínio proporcional e proporcionalidade, inferência e predição, abordando situações que envolviam grandezas proporcionais e não proporcionais. Esse encontro contemplou três grandes momentos:

A) Um momento deleite: nesse encontro, nosso momento deleite foram imagens das obras de arte de Ron Mueck, escultor que produz obras hiper-realistas. Suas esculturas são feitas em escalas maiores ou menores que o da realidade. Tudo extremamente parecido com o real. A pergunta para os professores, era: “Qual a característica fundamental da obra do escultor Ron Mueck?” A intenção era que observassem que as obras pareciam extremamente reais visto serem proporcionais a figuras da realidade;
B) A Apresentação da Metodologia: Apresentação das 10 etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e
C) O trabalho com o Problema do Dia: trata-se do problema gerador apresentado a seguir.

Em 1990, minha irmã media 1,50 m e “pesava” (massa) 54 kg; em 1992, media 1,52 m e pesava 50 kg. Quanto ela pesava em 1996?

Com esse problema pretendíamos mostrar aos professores que nem todas as grandezas atuam de maneira proporcional. E que nem todo problema dá como resultado, necessariamente um valor numérico. Nosso foco era o de trabalhar com a predição – uma das características do raciocínio proporcional.

Descrição do experimento realizado com os professores

O sétimo encontro ocorreu no dia 11 de novembro de 2021, com 35 professores que atuam no 3º, 4º e 5º anos, polivalentes, assistentes e educadores especiais. Esses professores, por uma questão ética, foram identificados como professor 1, professor 2...etc, para que seja preservadas suas identidades. A professora-pesquisadora, por sua vez, é a primeira autora deste trabalho.

Ao descrevermos o momento de trabalho com o *Problema do dia* poderão ser observados todos os passos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, descritas por Onuchic e Alevatto (2014).

Inicialmente apresentamos o problema gerador para os professores e os convidamos a ler o problema individualmente. Em seguida, realizamos a leitura em conjunto com os professores. Como nenhum professor apresentou dúvida, passamos para a fase de exploração do problema. Nessa etapa questionamos a compreensão do enunciado; fizemos perguntas com o intuito de provocar a curiosidade e mobilizar os conhecimentos prévios desses professores.

ISSN 2526-2882

Em seguida, os professores se dividiram em 7 grupos e dedicaram-se à resolução do problema. Para isso, foram criadas mais salas no Google Meet[22], para onde eles se dirigiram a fim de discutir e resolver o problema. Visto que poucos professores se sentiram à vontade para usar o Jamboard,[23] a pesquisadora os incentivou a resolver o problema, tirar foto e colocar no grupo do WhatsApp[24], afinal, essa parecia ser uma tecnologia de mais fácil acesso e mais compreensível para os professores, onde todos teriam acesso às resoluções. Enquanto estavam nos grupos, a professora-pesquisadora os observou, incentivou e tirou eventuais dúvidas, entrando nas salas do Google Meet e interagindo com os professores.

Durante a resolução do problema os professores dialogaram entre si na busca de comprovar suas conjecturas e resoluções. Transcrevemos as falas do grupo 1.

> ***Professora 1:*** *Quantos quilos deu aí?*
> ***Professor 2:*** *Prá mim, eu ia pôr 46.*
> ***Professora 1:*** *No meu deu 46 também.*
> ***Professor 2:*** *É isso mesmo?*
> ***Professora 3:*** *O meu deu 42.*
> ***Professora 1:*** *É porque vai diminuindo o peso. Ela vai crescendo e emagrecendo.*
> ***Professor 2:*** *Vai emagrecendo... isso...*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Pessoal, ouvi no grupo todos comentando que acham que eu estou enganando todo mundo com "o problema da mulher" que está emagrecendo... Pode ser... cuidado...fiquem atentos...*
> ***Professor 2:*** *Por que, Professora (se referindo à Professora-Pesquisadora)?*
> ***Professora 1:*** *Será que a mulher está engordando 'em vez' de emagrecer?*
> ***Professor 2:*** *Ué, será que ela parou de crescer, então? Porque (o problema) não fala do crescimento dela.*
> ***Professora 1:*** *Vamos ficar nessa hipótese mesmo. Se alguém fez certo, a gente cópia e cola.*
> ***Professor 2:*** *Nós perguntamos se ela parou de crescer. Aqui não fala...*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Tudo bem aí?*
> ***Professor 2:*** *Sim*
> ***Pesquisadora:*** *Posso tirar alguma dúvida?*
> ***Professor 2:*** *A senhora colocou uma dúvida na gente.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Vou compartilhar com vocês um quadro.*

Em seguida, compartilhamos com os professores o quadro 1, a fim de organizarmos os dados oferecidos pelo problema que foi projetado na sala principal do Google Meet. E realizamos a leitura do problema.

Quadro 1: Dados do Problema

Ano	Altura (m)	Massa (kg)
1990	1,50	54
1992	1,52	50

Fonte: construído pelas autoras

[22]**Google Meet** é um serviço de comunicação por vídeo.
[23]**Jamboard** é um quadro interativo para colaboração on-lines.
[24]**Whatsapp** aplicativo que possibilita a troca de diversos arquivos de mídia.

> ***Professora-Pesquisadora****: O problema diz que: em 1990, ela media 1,50 m e "pesava" 54 kg. Em 1992, ela media 1,52m e "pesava" 50 kg. Ok. Então, em 2 anos, ela cresceu 2 cm. É isso?*
> ***Professor 2:*** *E emagreceu 4 kg.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Exato...Vamos esquecer a massa um pouquinho... Se em 2 anos ela cresceu 2 cm; em 4 anos (de 1992 a 1996) ela crescerá quantos centímetros? [...] Se em 2, ela cresce 2; em 4, ela cresce... Assim que devo pensar?*
> ***Professor 2:*** *Quatro.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Então aqui* (aponta para a célula de altura da tabela*), vai para quanto?*
> ***Professor 2:*** *1 metro e 56 centímetros.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Agora aqui... Se em 2 anos ela emagreceu 4 quilos; em 4 anos, ela emagrece quanto?*
> ***Professor 2:*** *Ué... nós calculamos 6.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Oh... Em 2, ela emagrece 4; em 4, que é o dobro... ela emagreceria...*
> ***Professora 3:*** *oito.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Oito. Então, 50 menos 8... quarenta e dois... tudo bem? É assim que devo pensar? A questão é... estamos comparando duas grandezas, não é mesmo? Vamos pensar nas crianças que crescem muito... Em um ano, uma criança teve um estirão e cresceu 5 cm. Ela emagrecerá proporcionalmente? Ela emagrecerá, por exemplo, 5 kg... ou 10 kg?*
> ***Professor 2:*** *Não.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Não. Portanto não se trata de grandezas que crescem ou decrescem proporcionalmente.... não são duas grandezas proporcionais. Então qual seria nossa resposta para esse problema?*
> ***Professor 2:*** *É, professora... agora deu branco.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *A resposta não poderia ser: "não tenho a mínima ideia"; "não sei"; "não dá para saber"? Porque estamos lidando com duas grandezas que não obedecem às regras da proporcionalidade... diferente da velocidade, da porcentagem, da densidade demográfica... Nem todas as grandezas são proporcionais. Por isso ficamos confusos. Nem tudo cresce ou decresce proporcionalmente.*
> ***Professor 2:*** *É um erro nosso... tudo que a gente vê, assim, em situação-problema, a gente quer resolver e achar uma solução; e, nesse caso, não há uma solução.*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *É uma tendência nossa, enorme, agir assim.*
> ***Professor 2:*** *E ela pode crescer e engordar...*
> ***Professora-Pesquisadora:*** *Simmmm, era o que o outro grupo dizia: "Essa criatura, com o passar dos anos deve estar com 70 kg. Ainda mais mulher que costuma engordar com a idade..."*
> ***Professora 1:*** *Mas nós podemos pensar nisso também. Será que ela não engordou? Tem criança que engorda... Nós discutimos isso também...*

Os professores enviaram suas resoluções para o grupo de WhatsApp. De posse destas, voltamos para a sala principal do Google Meet, para a Plenária e a busca pelo Consenso.

Nesse momento os professores apresentaram e compartilharam suas resoluções ao problema dado, no grupo do WhatsApp. Por estarmos trabalhando online, esse momento não contemplou o "Registro na Lousa", pelos alunos. No entanto, a Professora-Pesquisadora, fazendo uso da lousa digital, registrava o que iam falando, enquanto todos acompanhavam, em paralelo ao trabalho no meet, as resoluções que cada grupo apresentara no Whats App.

No quadro 2 apresentamos as respostas dadas pelos grupos ao problema proposto.

Quadro 2 Respostas dos Grupos

Respostas dos grupos	Comentários da pesquisadora
GRUPO 1 *Em 1990: 1,50m – 54kg* *Em 1992: 1,52m – 50kg -> em 2 anos perdeu 4 kg* *Em 1996 -> 4 anos mais tarde vai perder 2 x 4 = 8kg* *Em 1996 -> 42kg.*	Apesar da professora-pesquisadora ponderar com o grupo 1 sobre sua análise, eles procuraram mantê-la e apresentar a resolução numérica sobre a qual tinham refletido inicialmente. Essa análise envolveu o pensamento aditivo: se adiciono 2 anos, de 1990 a 1992, adicionarei 4 anos, de 1992 a 1996. Se, em 2 anos, perdeu 4 kg (de 54 kg para 50kg) e cresceu 2 cm, em 4 anos, perderia 8 kg e cresceria 4 cm.
GRUPO 2 *1990 - 1,50 m – 54kg* *1992 – 1,52 – 50kg* *1994 – 154* *1996 – 1,56 -> 42kg pelos dados (proporção)* *R: não tem um padrão para seguir*	O grupo 2 fez uso de um passo intermediário: calculou que em 1994, "minha irmã" teria crescido mais 2 cm, passando a medir 1,54 m. Ao concluir o problema, anunciou que se tratava de uma proporção. Contudo, intrigados, refletiram que não havia "um padrão a seguir". Também não observaram que o problema não perguntava a altura, apenas o peso que teria em 1996.
GRUPO 3 *1990 – 1,50 - 54kg* *1992 – 1,52 - 50kg* *1994 – 1,54 - 46kg* *1996 – 1,56 - 42kg*	O grupo 3 montou passos intermediários como o grupo 2, mas não refletiram sobre o resultado numérico que apresentaram.
GRUPO 4 *1990 –> pesa 54 altura 1,50m* *1992 –> pesa 50 -> 1,52m* *1994 –> pesa 48 -> 1,54* *1996 – pesa 42kg -> 1,56* *Altura –> 2 em 2* *Peso -> 4 em 4*	O grupo 4 tentou construir uma relação proporcional; variou a altura de 2 em 2 cm e o peso, de 4 em 4kg. Contudo, passou de 50kg para 48kg e depois para 42kg.
GRUPO 5 Problema dos kg *1990 – 1,50 – 54kg* *1992 – 1,52 – 50kg* *"Levar em consideração a idade, o organismo, metabolismo, alimentação, crescimento não são proporcionais ao peso (engordar/aumentar). Creio que falta um dado, este problema não pode ser resolvido por falta de lógica matemática por exemplo: ´A pessoa consegue crescer proporcionalmente com a perda de peso´".*	O grupo 5 procurou fazer perguntas e não resolver o problema. Inclusive não apresentaram cálculos. Apenas organizaram os dados, num formato de tabela e procuraram refletir sobre a questão. Embora não tenham se expressado com clareza, tentaram expor em palavras o seu pensamento.
GRUPO 6 *Em 1990 media 1,50 e pesava 54kg* *1992 " 1,52 " 50kg* *1994 " 1,54 " 46kg* *1996 " 1,56 " 42kg*	O grupo 6 organizou os dados, mas não mostrou seu processo de pensamento. Apenas deu uma resposta numérica. O grupo 6, parece ter pensado como os grupos 3 e 4.
GRUPO 7 *1990 – 1,50 – 54kg* *1992 – 1,52 - 50kg* *1996 - 1,56 – 42kg*	O grupo 7 mostrou alguns resultados, mas não justificou seu raciocínio.

Fonte: construído pelas autoras.

Observamos que com exceção do grupo 5, os outros não trabalharam com a predição: quanto mais cresço, mais emagreço? Meu crescimento é proporcional, conforme os anos passam? Quanto mais envelheço, necessariamente emagreço? Cresço todos os anos? Se sim, cresço todos os anos a mesma quantidade de centímetros? Assim como que a maioria dos grupos não fez uso das unidades de medidas, trabalhando sem dar sentido aos números que manipulavam. Na maioria das vezes mostraram apenas as respostas do problema sem se preocupar em justificá-las.

Durante as discussões das respostas uma professora fez um comentário, finalizando a busca pelo consenso.

> ***Professora 4:*** *Nosso grupo ficou indignado com essa pergunta. É assim oh... é o seguinte... primeiro porque chegamos ao resultado de 42 kg... mais(sic) assim absurdamente... Porque a mulher é fantástica, né? Mas porque nós tínhamos esses dados... ou seja, deu para fazer o cálculo porque os dados estavam ali. Então, ok. Seguimos a proporção. Porém, esse resultado de 42 kg fica muito discrepante. Então nós chegamos à conclusão que não temos os dados. Não sabemos quanto irá medir ou pesar de um ano para outro. Vai depender da genética, do metabolismo... nós falamos de um monte de coisas... até da receita da mulher... que a gente quer para depois utilizar, para todas nós ficarmos bem magrinhas. Então chegamos a essa conclusão... colocamos duas respostas... essa resposta 42 e a segunda, que fica incoerente essa resposta de 42 kg.*

No momento seguinte foi feita a formalização dos conceitos trabalhados, no qual apresentamos dois significados do número racional: o conceito de fração, como a relação entre a parte e o todo de uma unidade; e o conceito de razão, como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas (VERGNAUD, 2013). Explicitamos as diferenças entre razão e fração, e mostramos o motivo das grandezas que apareciam no problema não serem proporcionais. Abordamos ainda, o fato de que nem sempre um problema apresenta a solução com um valor numérico e que se faz necessário o trabalho com a inferência e a predição; e que esses conceitos são pré-requisitos para se construir um raciocínio proporcional.

Como a próxima etapa trata do aprofundamento da aprendizagem, nela os professores puderam se apropriar do conceito de proporcionalidade por meio da elaboração e resolução de novos problemas (etapa de proposição, exploração e resolução de problemas) – essas atividades caracterizaram nossos encontros assíncronos (2 horas por semana, totalizando também 8 “encontros”, ou 16 horas).

Discussão dos resultados

O objetivo do problema proposto foi que os professores observassem que nem todas as grandezas são proporcionais. Esperávamos que discutissem essa ideia, no grupo, sem partir para a busca de uma solução numérica. Isso não aconteceu com a maioria dos grupos. Assim nas resoluções apresentadas pelos professores observamos que a maior parte dos erros estavam relacionados à falta do raciocínio proporcional para identificar quando uma situação é proporcional ou não.

Ao analisarmos os resultados apresentados pelos grupos pudemos notar que os professores dos grupos 1, 3, 4, 6 e 7 concentraram-se na busca por uma resposta numérica e apenas o grupo 5, embora não tenha conseguido registrar corretamente, entendeu que não precisamos encontrar um valor numérico, para resolver um problema.

Com relação às estratégias adotadas, notamos um amadurecimento do pensamento dos professores ao longo dos encontros. Pois nos primeiros encontros os grupos colocavam apenas a resposta para o problema, sem apresentar o processo de raciocínio usado para alcançar aquele resultado. Contudo, neste 7º encontro, três grupos (1, 2 e 5) tentaram descrever em palavras, como pensaram a respeito e conseguiram construir hipóteses e discorrer sobre elas. Os grupos 2 e 5, mostraram criticidade ao questionar a validade do resultado numérico.

O grupo 2, ao dizer que: *"Não tem um padrão para seguir"*. Mostra uma busca por padrões ou por conexões que expliquem o resultado encontrado. Contudo, ainda apresenta um valor numérico, como resultado. Assim nesse grupo 2, notamos a insegurança dos seus membros ao insistir numa resposta numérica, mesmo sem encontrar uma lógica para a resposta.

O grupo 5, por sua vez, de maneira mais completa registra o seguinte: *"Levar em consideração a idade, o organismo, metabolismo, alimentação, crescimento não são proporcionais ao peso (engordar/aumentar). Creio que falta um dado, este problema não pode ser resolvido por falta de lógica matemática por exemplo: a pessoa consegue crescer proporcionalmente com a perda de peso."* Esse grupo, por sua vez, procurou refletir e problematizar a questão e foi o único grupo que conseguiu se desvencilhar da resposta numérica. Quando observou que a resposta numérica não fazia sentido, suas estratégias mudaram. Diante da mudança de estratégia percebemos o avanço dos professores, e com as respostas dadas, observamos que eles compreenderam o conceito de grandezas não proporcionais.

De forma geral, observamos que os professores não perceberam que uma situação proporcional exige o pensamento multiplicativo. As respostas erradas dadas pelos grupos ao problema proposto demonstraram dificuldade em relação aos conhecimentos prévios necessários para resolução do problema, como o conhecimento da predição (ato de prever o que vai acontecer no futuro; predizer o comportamento da grandeza), um pré-requisito para o trabalho com o raciocínio proporcional e a proporcionalidade.

Nas estratégias erradas dos professores identificamos ainda que, embora tenham compreendido a questão, não mostraram criticidade diante do resultado encontrado. Também notamos que a maioria dos grupos usou o pensamento aditivo, e em menor número, o pensamento multiplicativo. Além do que percebemos que não conseguiam diferenciar razão de fração, ambos números racionais; e não dominavam o conceito de proporção como uma igualdade entre duas razões.

Entre os conteúdos que são trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental e explorados através da aritmética, o raciocínio proporcional é uma forma de raciocínio extremamente importante, que faz comparações multiplicativas. Quando a criança assimila esse aprendizado, outros tópicos que são estudados posteriormente, como "equivalência de frações; conversão de medidas; porcentagem; problemas com razões e taxas acabam fluindo sem dificuldade, pois todos esses tópicos convergem para a forma de pensamento proporcional" (BOTTA, 1997, p. 116).

Na escola as situações proporcionais apresentadas aos alunos geralmente envolvem três valores conhecidos e um quarto valor desconhecido, assim o ensino e o aprendizado da proporcionalidade ficam resumidos a aplicação do algoritmo da "regra de três". E isso leva os alunos a não compreenderem se a situação problema envolve a ideia de proporcionalidade direta ou inversa, e o motivo de se multiplicar em cruz. Essa falta de uma prévia análise qualitativa das situações problemas leva os alunos a darem respostas incorretas. Para Botta (1997, p.129) isso acontece porque "Eles tendem a passar diretamente para os cálculos ou para as fórmulas conhecidas. Nem se preocupam em verificar se as respostas obtidas pelos cálculos feitos estão compatíveis com os parâmetros dados pelo problema".

Observamos que os professores da pesquisa possuíam dificuldades semelhantes às dos alunos. Isso nos levar a concluir que as dificuldades apresentadas pelos alunos, são as mesmas dos professores, e isso talvez ocorra porque se o professor não tem domínio e segurança do conteúdo que ensina, como consequência a aprendizagem dos alunos será deficiente.

Cramer, Post e Currier (1993, p.159) enfatizaram que "o fato de que muitos aspectos de nosso mundo operam de acordo com regras proporcionais torna as habilidades de raciocínio proporcional extremamente úteis na interpretação de fenômenos reais". Sendo este conhecimento tão importante e tão necessário, seria natural concluir que os professores possuam o raciocínio proporcional bem desenvolvido. No entanto, observamos pelas respostas dos professores que isso não é verdade. E isso vai refletir no processo de ensino e aprendizagem, pois o professor vai ensinar aquilo que não sabe, e vai se basear na aplicação de métodos, que ele também não compreende e que foram memorizados sem uma reflexão.

Por fim, observamos que o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no processo de formação continuada possibilitou aos professores um diálogo com seus pares em um trabalho colaborativo na resolução do problema e debates sobre a estratégia e solução. Outro ponto a se destacar é o fato de a avaliação acontecer junto com o processo de ensino-aprendizagem, pois possibilitou identificar os erros dos professores, suas dificuldades e ajudá-los a repensar suas respostas e buscar novas estratégias de solução repensar suas práticas em sala de aula.

Considerações finais

O objetivo desse trabalho foi investigar o raciocínio proporcional de um grupo de professores dos anos iniciais, levando-os a refletir sobre esse objeto do conhecimento. Os resultados da investigação apontaram que o grupo de professores verbalizou e enfatizou que, em seus cursos de formação inicial, não tiveram esse assunto explorado e que apenas aprenderam a executar o método da “regra de três”. E isso foi confirmado no decorrer da investigação, pois observamos que os professores apresentaram dificuldades em resolver o problema proposto mostrando sua fragilidade em relação ao conteúdo de proporcionalidade.

Tal situação nos leva a pensar que um ensino que se baseia em ensinar apenas procedimentos mecânicos, como a regra de três simples, não garante que os professores entendam ideias implícitas ao raciocínio proporcional. Pois para raciocinar proporcionalmente os professores precisam ser capazes de distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais. E isso tem implicações diretas na forma de ensinar esse conteúdo a seus alunos. Visto que as pesquisas mostram que, em geral, os professores ensinam como lhes foi ensinado, mas como garantir ao aluno um aprendizado adequado se professor nunca teve semelhante experiência quando foi aluno?

A resposta para tal indagação é que os cursos de formação inicial e continuada promovam discussões sobre o conteúdo de proporção que esses professores possam ensinar de forma eficiente. Pois como consequência de um ensino de proporção deficiente, os estudos revisados mostraram que maior parte das pessoas não constrói esse raciocínio completamente. E isso talvez se justifique pela forma como o conteúdo de razão e proporção é ensinado na escola.

Diante do exposto é preciso que as discussões sobre proporcionalidade e raciocínio proporcional sejam incluídos nos cursos de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática para os estimular buscar outras abordagens e estratégias, aprimorando seus conhecimentos matemáticos e sua capacidade para resolver problemas e, consequentemente, de seus alunos.

Referências

BOTTA, L.S. **Números Racionais e Raciocínio Proporcional: Considerações sobre o Ensino-Aprendizagem.** 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and Teaching ratio and proportion: research implications. In: OWENS, D.T. (Ed.) **Research ideas for the classroom:** middle grades mathematics**.** New York: Macmillan, 1993. p. 159-178.

CYRINO, M.C.C.T. Mathematics Teachers' Professional Identity Development in Communities of Practice: Reifications of Proportional Reasoning Teaching. **Bolema**: **Boletim de Educação Matemática,** v. 30, n. 54, p. 165-187, abr. Rio Claro: São Paulo, 2016.

OWE, C.; NUNES, T. & BRYANT, P. Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. In. **International journal of science and mathematics education**. National Science Council. Taiwan, 2010.

JEANNOTTE, D., & KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 96(1), 1-16. 2017

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J. & FINDELL, B. Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. **National Research Council**. Washington, DC: The National Academies Press, 2001.

LAMON, S.J. Teaching Fractions and Ratios for Understanding. **Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teacher.** – 3rd ed. published. Nova York: Routledge, 2012.

LESH, R., POST, T., BEHR, M. Proportional reasoning. In: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), **Number Concepts and Operations in the Middle Grades** (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

NORTON, S. J. The construction of proportional reasoning. **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 4, pp. 17-24. Melbourne: PME, 2005.

ONUCHIC, L. de L. R. & ALLEVATO, N. S. G. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. NOGUTI, F.C.H.; JUSTULIN, A.M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. de L. R. & ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Revista Bolema,** Rio Claro (SP), v. 25, nº 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. de L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M.A.V. (Org). **Pesquisa em matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999.

SANTOS, A.L.; PAIVA, M.A.V.; LORENZUTTI, A. Investigando o conceito de proporcionalidade em uma formação continuada de professores. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**. Volume 8, Número 1, pág. 120-131, 2019.

SERRAZINA, L.; RODRIGUES, M.; ARAMAN, E. Envolver os alunos em processos de raciocínio matemático: as ações do professor. **Psicologia em Pesquisa**, v. 14, n. 1. Juiz de Fora, 2020. p. 18-36

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores em sala de aula.** Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Dados eletrônicos. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels**? Journal for the Study of Education and Development. Infancia y Aprendizaje**. Vol. 36, Nº 2, 2013. p. 131-161.

VIEIRA, W., RODRIGUES, M., & SERRAZINA, L. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiencencia de formação. **JIEEM** Vol.14, n.4, 2021, p. 404-414.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 2ª Ed. Porto Alegre. Editora: Bookmam, 2001.

Biografia Resumida

Rosineide de Sousa Jucá: Doutora em Educação em Ciências e Matemática. Professora da Universidade do Estado do Pará e Professora Formadora do Centro de Formação dos Profissionais da Educação da Secretaria de Educação do Estado do Pará. Coordenadora do GPEMAT - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática da UEPA. Membro do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas.

Lattes: http://lattes.cnpq.br/2330267916634053

Contato: rosejuca@gmail.com

Silvia Rocha Falvo: Mestranda do Programa em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro/SP; membro do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas. Coordenadora Pedagógica na rede privada de São Carlos/SP.

Lattes: http://lattes.cnpq.br/0238192782263740

Contato: silvia.falvo@unesp.br